**Master ATIAM – 21 février 2011**

## MMIM : Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

*Partie I : Informatique théorique*

Marc Chemillier

Cette partie sera rédigée sur une copie à part. Elle est notée sur la moitié de la note finale. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.

### Question 1

**1a-** Calculer l'oracle des facteurs du mot $u = abaabb$.
**1b-** Donner pour chaque état $p$ le plus long suffixe de $u_1 \ldots u_p$ qui soit répété à gauche.
**1c-** Existe-t-il des mots reconnus non facteurs de $u$ ? Donner la table de transition de l'oracle en indiquant les relations correspondant à $a$, $b$ et aux mots $ab$ et $aabb$.

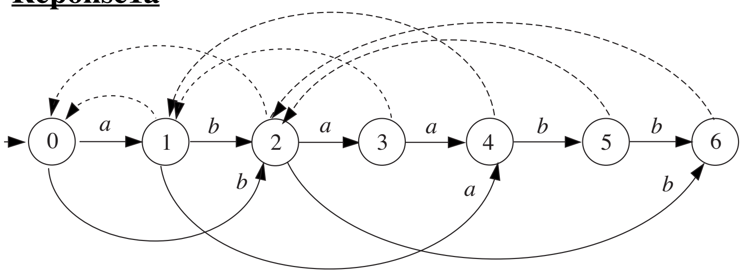
### Question 2

**2a-** Donner la factorisation du mot $x = abcaacbacaab$ en suite de mots de Lyndon décroissante pour l'ordre alphabétique.
**2b-** Existe-t-il des suffixes du mot $x$ qui sont inférieurs à $x$ pour l'ordre alphabétique ? Si oui lesquels ?
**2c-** Pour chacun des mots de Lyndon $u$ intervenant dans la décomposition de $x$, on pose la même question : existe-t-il des suffixes de $u$ inférieurs à $u$ ? Que remarque-t-on ?

### Question 3

On rappelle qu'un mot $w = w_0w_1\ldots w_{n-1}$ sur l'alphabet des entiers est une *chaîne euclidienne* s'il existe $d$ tel que $t(w) = \delta^d(w)$ où l'application $t$ consiste à ajouter 1 à la première lettre et à retrancher 1 à la dernière : $t(w) = (w_0+1)w_1\ldots(w_{n-1}-1)$.
Montrer que pour l'ordre alphabétique, $w$ est inférieur à $\delta^d(w)$ et que $\delta^i(w)$ est supérieur à $\delta^{i+d}(w)$ pour tout entier $1 \le i \le n-1$.

**Réponse1a**




**Réponse1b**

$p = 0$ suffixe répété = ε
$p = 1$ suffixe répété = ε
$p = 2$ suffixe répété = ε
$p = 3$ suffixe répété = $a$
$p = 4$ suffixe répété = $a$
$p = 5$ suffixe répété = $ab$
$p = 6$ suffixe répété = $b$

**Réponse1c**

pas de mot reconnu non facteur

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 1 | 4 | 3 | 4 | | | |
| *b* | 2 | 2 | 6 | | 5 | 6 | |
| *ab* | 2 | 5 | | 5 | | | |
| *aabb* | 6 | | 6 | | | | |

**Réponse2a**

$x = (abc)(aacbac)(aab)$ avec $abc \geq aacbac \geq aab$

**Réponse2b**

$aacbacaab$, $aab$ et $ab \leq abcaacbacaab$

**Réponse2c**

Non, tous les mots de Lyndon sont inférieurs à tous leurs suffixes.

**Réponse3**

$w_0 < w_0{+}1$, donc $w <_{\text{alpha}} t(w) = \delta^d(w)$
Pour $1 \leq i \leq n{-}1$, $\delta^i(w) = w_i \ldots w_{n-1} w_0 w_1 \ldots w_{i-1}$
et $\delta^{i+d}(w) = \delta^i(\delta^d(w)) = \delta^i(t(w)) = w_i \ldots (w_{n-1}{-}1)(w_0{+}1) w_1 \ldots w_{i-1}$
Comme $w_{n-1} > w_{n-1}{-}1$, il vient $\delta^i(w) >_{\text{alpha}} \delta^{i+d}(w)$