MMIM Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

Marc Chemillier

Master Atiam (Ircam), 2008-2009

Notions théoriques en combinatoire des mots

- Définitions générales
  - Mots, langages
  - Monoïdes
  - Synchronisation
- Conjugaison, mots de Lyndon
  - Application musicale : rythmes asymétriques
- Mots infinis

1. Définitions générales

1.1 Mots

Un *mot* fini u est une suite de symboles. La longueur de u notée $|u|$ est le nombre de symboles du mot. Le *mot vide* noté ε est le seul mot de longueur nulle. L'ensemble des symboles noté Σ est appelé *alphabet*, et l'ensemble des mots sur l'alphabet Σ est noté Σ^*.

Pour deux mots $u = u_1 \ldots u_n$ et $v = v_1 \ldots v_m$, on définit la *concaténation uv* comme le mot obtenu en mettant les lettres de v à la suite de celles de u :

$uv = u_1 \ldots u_n v_1 \ldots v_m$.

Un mot $u \in \Sigma^*$ est *facteur* du mot $w \in \Sigma^*$ s'il existe $v, v' \in \Sigma^*$ tels que $w = vuv'$. Si $v = \varepsilon$, on dit que u est *préfixe*. Si $v' = \varepsilon$, on dit que u est *suffixe*.

Exemple : *abb* est facteur de *babba*, et *ba* est à la fois préfixe et suffixe, mais *aa* n'est pas facteur.

Un mot fini u est *périodique* si $u = x^n$ pour $n \geq 2$. Tout mot non périodique est dit *primitif*.

L'idée fondamentale de ce cours est que la notion de mot permet de représenter le principe de <u>succession d'événements dans une séquence musicale</u>, d'où son intérêt pour la modélisation en informatique musicale.

1.2 Langages

Les sous-ensembles de Σ^* sont appelés des *langages* (c'est-à-dire des ensembles de mots, ou de séquences musicales dans le contexte de l'informatique musicale).

Opérations sur les langages :

• opérations classiques sur les ensembles :
union $\cup$, intersection $\cap$, différence \, complémentaire,

• opérations héritées de la concaténation :
La concaténation de deux langages est définie par :
$L_1L_2 = \{uv, u \in L_1 \text{ et } v \in L_2\}$.
Exemple : $L_1 = \{a, ab\}$, $L_2 = \{c, bc\}$, $L_1L_2 = \{ac, abc, abbc\}$.

La *puissance* d'un langage L est définie inductivement :
$L^0 = \{\varepsilon\}$, $L^{n+1} = L^nL$.
L'*étoile* d'un langage L, notée L^*, est :
$L^* = \{\varepsilon\} \cup L \cup L^2 \ldots \cup L^n \cup \ldots$
Ce langage contient un <u>nombre infini</u> de mots, qui sont les répétitions indéfinies de mots de L.
Exemple : $L = \{ab, b\}$, L^* est l'ensemble de tous les mots tels que aa n'est pas facteur, et a n'est pas suffixe.
On note également L^+ le langage :
$L^+ = L \cup L^2 \ldots \cup L^n \cup \ldots$

1.3 Monoïdes

Un *monoïde* est un ensemble muni d'une opération
• associative,
• possédant un élément neutre 1.
Un *sous-monoïde* est un sous-ensemble fermé pour l'opération et contenant l'élément neutre. L'ensemble Σ^* des mots sur l'alphabet Σ est un monoïde pour la concaténation, dont l'élément neutre est le mot vide ε. C'est le *monoïde libre* sur Σ.

Un *morphisme* de monoïde est une application φ telle que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ et $\varphi(1) = 1$. Toute application d'un alphabet Σ dans un monoïde quelconque se prolonge dans le monoïde libre Σ^* en un unique morphisme de monoïdes.

Un *code* est une partie X de Σ^* telle que si $a_1, \dots a_p$ et $b_1, \dots\ b_q$ sont des éléments de X vérifiant :

$a_1 \dots a_p = b_1 \dots b_q$

alors $p = q$ et $a_i = b_i$ pour tout $i \leq p$.

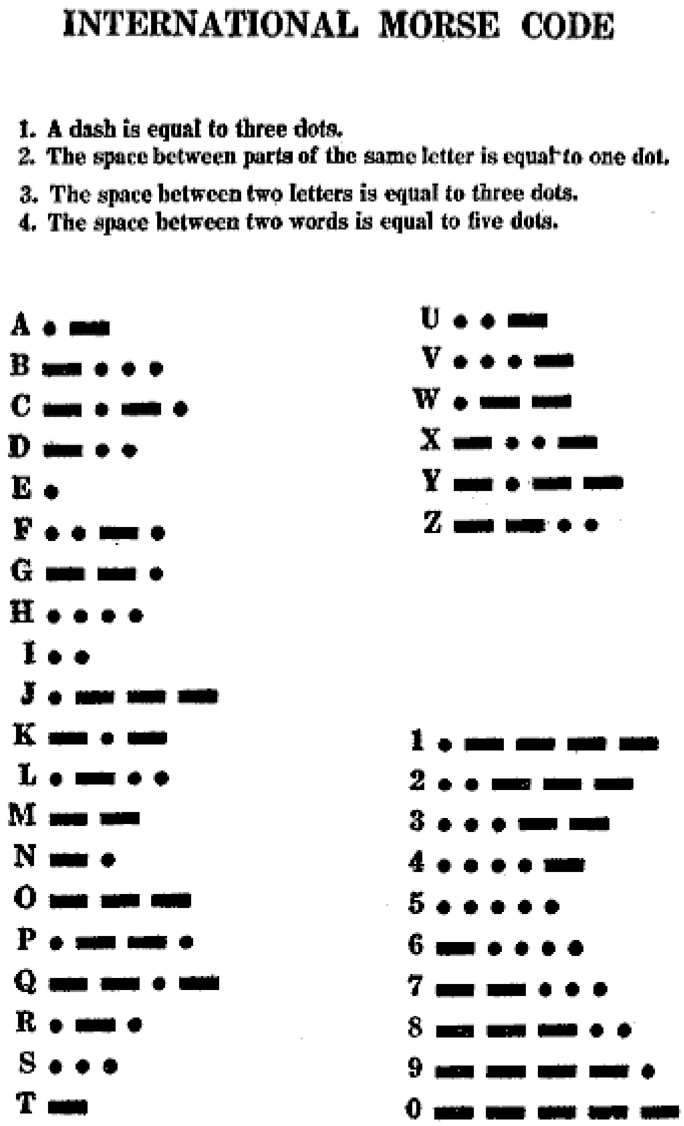
Exemples :

• L'ensemble $\{a, ab, c, bc\}$ n'est pas un code car

$(a)(bc) = (ab)(c)$

• L'ensemble Σ^n des mots de longueur n est un code, en particulier l'alphabet Σ est un code.

• Attention : Le code morse n'est pas un code dans le sens ci-dessus.


INTERNATIONAL MORSE CODE

1. A dash is equal to three dots.
2. The space between parts of the same letter is equal to one dot.
3. The space between two letters is equal to three dots.
4. The space between two words is equal to five dots.

A • —	U • • —
B — • • •	V • • • —
C — • — •	W • — —
D — • •	X — • • —
E •	Y — • — —
F • • — •	Z — — • •
G — — •	
H • • • •	
I • •	
J • — — —	
K — • —	1 • — — — —
L • — • •	2 • • — — —
M — —	3 • • • — —
N — •	4 • • • • —
O — — —	5 • • • • •
P • — — •	6 — • • • •
Q — — • —	7 — — • • •
R • — •	8 — — — • •
S • • •	9 — — — — •
T —	0 — — — — —

On a E = « • », T = « — », et N = « —• », donc on a N = TE. Le décodage en morse se fait grâce à la présence de séparateurs entre les lettres.

Tout sous-monoïde M de Σ^* est engendré par un unique ensemble B appelé *base* de M tel que $M = B^*$. La base B est l'ensemble des éléments de M qui ne sont pas le produit de deux éléments de M, soit :

B = (M\{ε}) \ (M\{ε})(M\{ε})

La base de Σ^* est l'alphabet Σ. Un sous-monoïde de Σ^* est *libre* si sa base est un code.

1.4 Synchronisation

Dans une séquence musicale, il n'y a pas seulement des événements successifs, mais aussi des événements simultanés. Pour en tenir compte, l'alphabet Σ n'est pas réduit à des symboles « atomiques », mais constitué d'ensembles d'événements se produisant simultanément. Ainsi, soit E l'ensemble des événements considérés, on prend comme alphabet l'ensemble de ses parties $\Sigma = \mathcal{P}(E)$.

Cela permet de synchroniser deux séquences musicales à l'aide d'une opération || sur Σ* appelée *superposition* définie récursivement pour u, v dans Σ*:

• pour le mot vide : $u \parallel \varepsilon = \varepsilon \parallel u = u$,

• pour deux sous-ensembles : $a, b \in \Sigma$, $au \parallel bv = (a \cup b)(u \parallel v)$,

où $a \cup b$ est l'union des ensembles d'événements a et b [Chemillier 1990, 2003].

Exemple : $E = \{1, 2, 3\}$

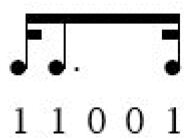
$u = \{1\}\{1\}\{1\}\{1\}$

$v = \{1\}\{2\}\{3\}$

$u \parallel v = \{1\}\{1, 2\}\{1, 3\}\{1\}$

Remarque : Cette définition consiste à faire l'**union des symboles en même position dans les deux séquences**. Elle ressemble à la **somme de deux polynômes**, qui consiste à faire, elle aussi, la somme des coefficients en même position dans les deux polynômes.

Le mathématicien Andranik Tangian a donné une interprétation musicale de l'algèbre des polynômes pour synchroniser des séquences rythmiques représentées par des suites de 0 ou 1 [Tangian 2002] :



La séquence rythmique 11001 correspond à $P(X) = 1 + X + X^4$, polynôme à coefficients dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

• La somme de polynômes représente la synchronisation.

• La multiplication par un monôme X^n correspond à un décalage de n unités.

• La multiplication de deux polynômes P et Q correspond à la superposition de plusieurs occurrences de la séquence P avec des décalages successifs définis par Q, à la manière d'un canon :

$Q(X) = 1 + X^2$,

$P(X)Q(X) = (1 + X + X^4)(1 + X^2) = (1 + X + X^4) + X^2(1 + X + X^4)$

$= 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^6$,

ce qui donne la séquence 1111101 correspondant au canon :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Remarque : Pour définir un anneau de polynômes, il faut que l'ensemble des coefficients ait une structure d'anneau. Dans le cas {0, 1}, il s'agit de l'anneau $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On a alors $1 + 1 = 0$, ce qui revient musicalement à « détruire » les attaques simultanées. Les applications de ce modèle ne concernent donc que la synchronisation de séquences rythmiques « complémentaires » (pas d'attaques simultanées), par exemple dans les « canons de pavage ».

(voir cours de Moreno Andreatta dans l'option MMIM)

2. Conjugaison et mots de Lyndon

2.1 Conjugaison

On introduit une permutation δ de Σ^* en posant :

$\delta(au) = ua$ pour $u \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$,

$\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Cela revient à faire passer la première lettre d'un mot à la fin.

La *classe de conjugaison* de u est l'orbite de u sous l'action de δ. C'est l'ensemble des permutations circulaires de u.

Proposition. *Un mot <u>primitif</u> u de longueur n a exactement n permutations circulaires distinctes.*

Dem. Supposons que deux permutations circulaires soient égales, c'est-à-dire $\delta^i(u) = \delta^j(u)$ pour $0 \leq i < j < n$.

Alors pour $k = j - i < n$, on a $\delta^k(u) = u$.

Soit d le plus petit entier > 0 tel que

$$\delta^d(u) = u.$$

On a $u = \delta^d(u) = \delta^{2d}(u) \ldots \delta^{md}(u) = \ldots$

Soit md le plus petit multiple de d vérifiant l'égalité et tel que $md \geq n$.

Alors $md = n$, sinon $d' = md - n < d$ est plus petit que d et vérifie aussi l'égalité.

Donc d divise n. On peut factoriser u en mots de longueur d :

$u = x_1x_2\ldots x_q$

Alors $u = x_1x_2\ldots x_q = \delta^d(u) = x_2\ldots x_qx_1$, donc $x_1 = x_2\ldots = x_q$ que l'on note x, et $u = x^d$.

Corollaire fondamental ([Lothaire 1983, p. 7, proposition 1.3.2]). *Si deux mots u et v commutent uv = vu, alors ils sont puissances d'un même mot u,* $v \in x^*$.

Dem. Soit n la longueur de uv et $k < n$ la longueur de u, on a $\delta^k(uv) = vu = uv$.

D'après la proposition précédente, si le mot uv n'a pas n permutations circulaires distinctes, *a contrario*, alors uv est puissance d'un mot plus court x de longueur d.

Mais alors d divise les entiers n, k et $n - k$.

Donc $u = x^{k / d}$ et $v = x^{(n - k) / d}$.

2.2 Mots de Lyndon

Un *mot de Lyndon* est un mot

• primitif,

• minimal pour l'ordre alphabétique dans sa classe de conjugaison.

Exemples : *abaa* est-il un mot de Lyndon ?

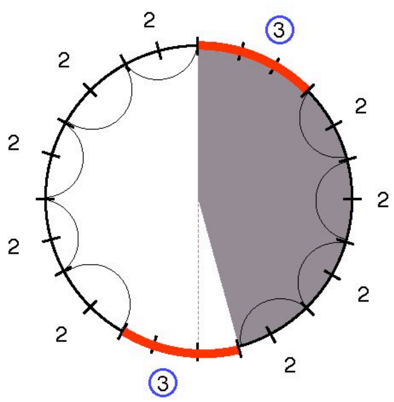
-> non, le mot de Lyndon associé est *aaab*.

Quel est le mot de Lyndon associé à *xyxxy* ?

Pour étudier des structures musicales périodiques, les mots de Lyndon fournissent <u>un représentant unique pour chaque classe de conjugaison</u>.

Il existe un algorithme très efficace pour calculer les mots de Lyndon (algorithme de Duval).

2.3 Application musicale : rythmes asymétriques



On considère l'alphabet $\Sigma = \{2, 3\}$. On considère les rythmes qui sont des mots de Σ^*. Le <u>poids</u> $h(w)$ d'un mot w est la somme de ses chiffres.

Un rythme w vérifie l'imparité rythmique si aucune de ses permutations circulaires ne se factorise en deux mots de même somme, c'est-à-dire de la forme uv avec $h(u) = h(v)$.

Exemple : $w = 32322$

(32)(322)

(23)(223)

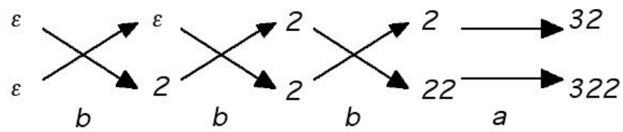
(32)(232)

(223)(23)

(232)(32)

Soient deux transformations a et b de $\Sigma^* \times \Sigma^*$ dans $\Sigma^* \times \Sigma^*$ définies par :

$$a(u, v) = (3u, 3v), \qquad b(u, v) = (v, 2u).$$



Le rythme 32322 s'écrit (32)(322) avec (32, 322) = $abbb(\varepsilon, \varepsilon)$.

Théorème ([Chemillier & Truchet 2003]). *Un mot w vérifie l'imparité rythmique si et seulement s'il existe une transformation f obtenue en combinant a et b avec un nombre impair de b telle que f(ε, ε) = (u, v) avec w = uv ou vu.*

3. Mots infinis

Un *mot infini* est une application de **N** dans un alphabet Σ. On définit la concaténation xu d'un mot fini $x \in \Sigma^*$ avec un mot infini u. Un mot $x \in \Sigma^*$ est *facteur* d'un mot infini u s'il existe $x' \in \Sigma^*$ et v mot infini tels que $u = x'xv$.

Un mot infini u est *m-périodique* si :

$u(i + m) = u(i)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.

Sa *période* est le plus petit entier m tel qu'il est m-périodique.

Un mot u est *ultimement périodique* s'il s'écrit $u = xv$ où v est périodique.

Pour un mot infini u, on note $P(u, n)$ le nombre de facteurs de u de longueur n.

• Que peut-on dire de $P(u, m)$ si u est un mot infini périodique de période m ?

$P(u, m) \leq m$

En effet, on passe en revue tous les facteurs de longueur m en se décalant à chaque fois d'un rang, et au bout de m décalages, on retombe sur le premier facteur.

En fait, il existe une discontinuité dans le comportement de $P(u, n)$ selon le type de mot infini : sa valeur est bornée par une constante pour les mots ultimement périodiques, alors qu'elle croît de façon plus que linéaire pour les autres.

Théorème. *Pour tout mot infini u, l'une des deux conditions suivantes est vraie :*

• *soit $P(u, n)$ est borné pour les mots ultimement périodiques,*

• *soit $P(u, n) \geq n + 1$ pour les autres.*

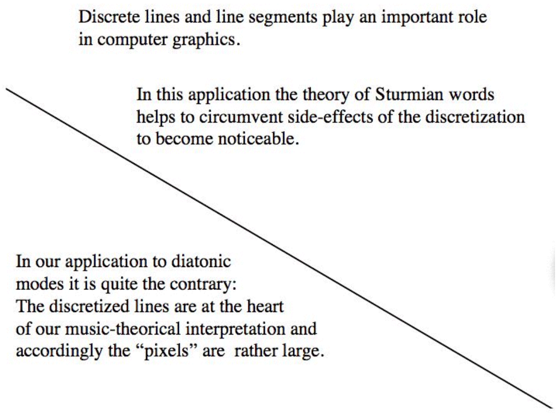
Un mot infini u est *sturmien* si $P(u, n) = n + 1$ pour tout n. Il s'agit des mots les plus « réguliers » après les mots périodiques.

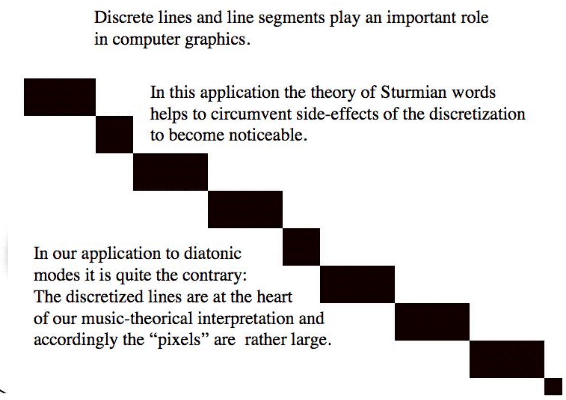
• Que peut-on déduire du fait que pour $n = 1$, on a $P(u, 1) = 2$?

L'alphabet Σ ne peut avoir que deux lettres.

Voir la conférence de Thomas Noll sur l'utilisation des mots sturmiens dans l'étude des modes diatoniques :

http://www.entretemps.asso.fr/maths/Noll.htm





Références

• <u>ouvrages fondamentaux</u>

Lothaire M., *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics, Vol. 17, Addison-Wesley, 1983 (réédité Cambridge University Press, 1997, chap. 1 disponible en ps).

Lothaire M., *Algebraic Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 2002.

Lothaire M., *Applied Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 2005.

• <u>modélisation de structures musicales</u>

Chemillier M., Structure et méthode algébriques en informatique musicale, Thèse Université Paris 7, LITP, 1990.

Chemillier M., Synchronisation of musical words, *Theoretical Computer Science* **310** (2003) 35-60.

Tangian Andranik, Making Rhythmic Canons, *JIM Journées d'informatique musicale*, GMEM, Marseille, 2002 (pdf).

Chemillier M., Periodic musical sequences and Lyndon words, *Soft Computing*, special issue on Formal Systems and Music, G. Assayag, V. Cafagna, M. Chemillier (eds.) **8** (9) (2004) 611-616.

Chemillier M., Truchet C., Computation of words satisfying the "rhythmic oddity property" (after Simha Arom's work), *Information Processing Letters* **86** (5) (2003) 255-261.

Chemillier M., Musique et rythme en Afrique centrale, *Pour la science*, dossier n° 47 « Mathématiques exotiques » (2005) 72-76.

Chemillier M., *Les Mathématiques naturelles*, Paris, Odile Jacob, 2007.

Hall Rachel W., Klingsberg Paul, Asymmetric rhythms, tiling canons, and Burnside's lemma, R. Sarhanghi, C. Sequin (eds.), *Mathematical Connections in Art, Music, and Science*, Winfield, Kansas, 2004, p. 189-194 (pdf).

Noll Thomas, Le Pli Diatonique. Algebraic Combinatorics on Words applied to the Study of the Diatonic Modes, Séminaire Mamuphi, Semadi 12 janvier 2008 (PowerPoint).