

**MMIM Modèles mathématiques  
pour l'informatique musicale**  
*Marc Chemillier*  
*Master Atiam (Ircam), 2009-2010*

Notions théoriques en combinatoire des mots

- Conjugaison, mots de Lyndon
- Combinatoire des mots appliquée à la musique
  - o Rythmes asymétriques
  - o Chaînes euclidiennes
  - o Gammes maximalement réparties
  - o Mots de Christoffel et mode lydien
- Construction des rythmes asymétriques

## 1. Conjugaison et mots de Lyndon

### 1.1 Conjugaison

On introduit une permutation  $\delta$  de  $\Sigma^*$  en posant :

$$\delta(au) = ua \text{ pour } u \in \Sigma^*, a \in \Sigma,$$

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon.$$

Cela revient à faire passer la première lettre à la fin du mot.

La *classe de conjugaison* de  $u$  est l'orbite de  $u$  sous l'action de  $\delta$ . C'est l'ensemble des permutations circulaires de  $u$  (ou rotations de  $u$ ).

Notons que si  $n$  est la longueur de  $u$ , on a toujours  $\delta^n(u) = u$ . L'ensemble des puissances  $\delta^k$  telles que  $\delta^k(u) = u$  forme un sous-groupe non trivial appelé fixateur de  $u$ , dans le groupe engendré par  $\delta$ .

L'application  $i \rightarrow \delta^i$  est un morphisme du groupe additif des entiers relatifs  $\mathbf{Z}$  dans le groupe des puissances de  $\delta$ . L'image réciproque du fixateur de  $u$  est un sous-groupe de  $\mathbf{Z}$ . Or tous les sous-groupes de  $\mathbf{Z}$  sont monogènes, c'est-à-dire de la forme  $d\mathbf{Z}$  avec  $d > 0$ .

Donc le fixateur de  $u$  est engendré par une unique puissance  $\delta^d$  et tout entier  $k$  vérifiant  $\delta^k(u) = u$  est nécessairement multiple de  $d$ .

Rappelons qu'un mot est primitif s'il n'est pas puissance d'un mot plus court.

**Proposition.** *Un mot primitif  $u$  de longueur  $n$  a exactement  $n$  permutations circulaires distinctes.*

**Dem.** Supposons que deux permutations circulaires soient égales, c'est-à-dire  $\delta^i(u) = \delta^j(u)$  pour  $0 \leq i < j < n$ .

Alors pour  $k = j - i < n$ , on a  $\delta^k(u) = u$ . Donc  $\delta^k$  appartient au fixateur de  $u$ . Soit  $\delta^d$  l'unique générateur du fixateur de  $u$ . Alors  $d$  divise  $n$  et  $d < n$ .

On factorise  $u$  en mots strictement plus courts de longueur  $d$  :

$$u = x_1 x_2 \dots x_q$$

Alors  $\delta^d(u) = x_2 \dots x_q x_1 = u = x_1 x_2 \dots x_q$ , donc  $x_1 = x_2 \dots = x_q$  que l'on note  $x$ . D'où  $u = x^d$ .

**Corollaire fondamental** ([Lothaire 1983, p. 7, proposition 1.3.2]). *Si deux mots  $u$  et  $v$  commutent  $uv = vu$ , alors ils sont puissances d'un même mot  $u, v \in x^*$ .*

**Dem.** Soient  $n$  et  $k < n$  les longueurs respectives de  $uv$  et de  $u$ .

On a  $\delta^k(uv) = vu = uv$ , donc  $\delta^k$  appartient au fixateur de  $uv$ . Soit  $\delta^d$  l'unique générateur du fixateur de  $uv$ . Alors  $d$  divise  $k$  et  $n$ , et par conséquent  $n - k$ .

Comme le mot  $uv$  n'a pas  $n$  permutations circulaires distinctes, la proposition précédente montre que  $uv$  est puissance d'un mot  $x$  de longueur  $d$ .

Il en résulte  $u = x^{k/d}$  et  $v = x^{(n-k)/d}$ .

## 1.2 Mots de Lyndon

Un mot de Lyndon est un mot

- primitif,
- minimal pour l'ordre alphabétique dans sa classe de conjugaison.

Exemples :  $abaa$  est-il un mot de Lyndon ?

-> non, le mot de Lyndon associé est  $aaab$ .

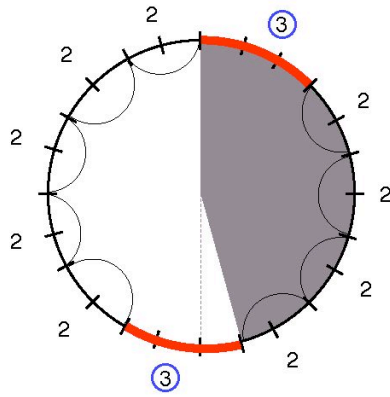
Quel est le mot de Lyndon associé à  $xyxxy$  ?

Pour étudier des structures musicales périodiques, les mots de Lyndon fournissent un représentant unique pour chaque classe de conjugaison.

Il existe un algorithme très efficace pour calculer les mots de Lyndon (algorithme de Duval).

## 2. Combinatoire des mots appliquée à la musique

### 2.1 Rythmes asymétriques vérifiant « l'imparité rythmique »



On considère l'alphabet  $\Sigma = \{2, 3\}$  et on étudie les rythmes qui sont des mots de  $\Sigma^*$ . Le poinds  $h(w)$  d'un mot  $w$  est la somme de ses chiffres.

**Définition.** Un rythme  $w$  vérifie l'imparité rythmique si aucune de ses permutations circulaires ne se factorise en deux mots de même somme, c'est-à-dire de la forme  $uv$  avec  $h(u) = h(v)$ .

Exemple :  $w = 32322$

- (32)(322)
- (23)(223)
- (32)(232)
- (223)(23)
- (232)(32)

## 2.2 Chaînes euclidiennes

L'alphabet  $\Sigma$  est l'ensemble des entiers naturels. Comme précédemment, le poinds  $h(w)$  d'un mot  $w$  est la somme de ses chiffres.

**Définition.** Un mot  $w = w_0w_1\dots w_{n-1}$  est une chaîne euclidienne si  $w$  est réduit à une seule lettre (c'est-à-dire un entier), ou si en ajoutant 1 à la première  $w_0$  et en retirant 1 à la dernière  $w_{n-1}$ , on obtient un mot  $t(w)$  qui est une rotation  $\delta^k(w)$  de  $w$ .

Exemple :  $w = 22323$ ,

$$t(w) = (2 + 1)232(3 - 1) = 32322 = \delta^3(22323).$$

On introduit deux morphismes sur  $\Sigma^*$  définis pour chaque « lettre » de  $\Sigma$  (c'est-à-dire chaque entier  $x$ ) :

$$I(x) = x + 1,$$

$$X(x) = 01^x \text{ (c'est-à-dire le mot commençant par 0 suivi de 1 répété } x \text{ fois).}$$

Construction de la chaîne euclidienne  $E(n, k)$  de longueur  $n$  et de poids  $p$  (Ellis *et al.* 2003) :

$$\begin{aligned} E(n, k) &= XE(n - k, k) \text{ si } n > k, \\ &= IE(n, k - n) \text{ si } n < k, \\ &= 1 \text{ si } n = k, \end{aligned}$$

Exemple :

$$E(13, 5) = XE(13 - 5, 5) = XE(8, 5) = XXE(3, 5) = XXIE(3, 2) = XXIXE(1, 2) = XXIXIE(1, 1) = XXIXI(1) = XXIX(2) = XXI(011) = XX(122) = X(01011011) = 0010010100101.$$

On obtient un mot de Lyndon  $w$  de longueur 13 et de poids 5 tel que :

$$t(w) = 1010010100100 = \delta^5(w)$$

$$E(5, 13) = IE(5, 8) = IIE(5, 3) = IIXE(2, 3) = IIXIE(2, 1) = IIXIXE(1, 1) = IIXIX(1) = IIXI(01) = IIX(12) = II(01011) = I(12122) = 23233.$$

Ce mot de longueur 5 et de poids 13 est en quelque sorte le « dual » du précédent.

S'il s'agit de rythmes dans lesquels 1 représente une frappe et 0 un silence, le mot dual donne le rythme correspondant. Godfried Toussaint s'est intéressé à tous les rythmes *aksak* et autres qui sont des chaînes euclidiennes (2005).

On montre qu'à une rotation près, il n'existe qu'une seule chaîne euclidienne de longueur  $n$  et de poids  $k$  donnés, c'est  $E(n, k)$ .

Il se trouve que tous les rythmes vérifiant l'imparité rythmique avec deux groupes de 3 sont des chaînes euclidiennes :

$$E(3, 8) = 233$$

$$E(5, 12) = 22323$$

$$E(7, 16) = 2223223$$

$$E(9, 20) = 222232223$$

$$E(11, 24) = 22222322223.$$

On notera qu'ils sont présentés sous forme de mots de Lyndon.

### 2.3 Gammes maximalement réparties

L'alphabet  $\Sigma$  est, comme précédemment, l'ensemble des entiers naturels. Une « gamme diatonique » est un sous-ensemble  $D = \{d_0, \dots, d_{d-1}\}$  du total chromatique  $\{0, 1, \dots, c - 1\}$ .

Pour simplifier la notation, on convient que  $D$  est indexé circulairement par  $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ , soit  $D = \{d_i\}_{i \in \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}}$ , ce qui signifie que  $d_{i+j}$  désigne  $d_{i+j \bmod d}$ .

On introduit un mot  $w$  de longueur  $d$  formé des intervalles chromatiques entre degrés de la gamme. Comme pour  $D$ , les symboles de  $w$  sont indexés circulairement par  $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ , c'est-à-dire que  $w_{i+j}$  désigne  $w_{i+j \bmod d}$ . On pose pour  $i \in \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$  :

$$w_i = d_{i+1} - d_i \bmod c.$$

À partir de  $w$  on construit une série de  $d - 1$  mots associés aux « intervalles diatoniques », c'est-à-dire aux valeurs en nombre de demi-tons chromatiques des « secondes », « tierces », « quarts », etc. apparaissant dans cette gamme. Pour  $x$  de 1 à  $d - 1$  le mot  $w(x)$  de longueur  $d$  est tel que chacun de ses symboles est la somme de  $x$  symboles consécutifs de  $w$  indexés circulairement, soit pour  $i \in \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$  :

$$w(x)_i = w_i + \dots + w_{i+x-1} \text{ mod } c,$$

ou de manière équivalente :

$$w(x)_i = d_{i+x} - d_i \text{ mod } c.$$

Clough & Douthett 1991 ont introduit la notion de « gamme maximale répartie » :

**Définition.** Une gamme est *maximalement répartie* si chacun des  $d - 1$  mots  $w(x)$  contient au plus deux symboles différents qui sont deux entiers consécutifs.

Remarque : Que se passe-t-il si le mot  $w$  ne contient qu'un seul symbole ?

-> Il en est de même de tous les mots « cumulés »  $w(x)$ .

Les modes correspondant à une division égale de l'octave sont des cas particuliers de gammes maximale réparties. Par exemple, la « gamme par tons » correspond à  $w = 222222$ .

Pour les touches blanches du piano, on a :

(maximally-even '(2 2 1 2 2 2 1))

k=1 (2 2 1 2 2 2 1)

k=2 (4 3 3 4 4 3 3)

k=3 (5 5 5 6 5 5 5)

k=4 (7 7 7 7 7 7 6)

k=5 (9 9 8 9 9 8 8)

k=6 (11 10 10 11 10 10 10)

Pour les touches noires du piano, c'est-à-dire la « gamme pentatonique », on a aussi :

(maximally-even '(3 2 3 2 2))

k=1 (3 2 3 2 2)

k=2 (5 5 5 4 5)

k=3 (8 7 7 7 7)

k=4 (10 9 10 9 10)

On peut généraliser cette construction sans passer par une gamme de référence  $D$ , en considérant des suites quelconques d'intervalles qui peuvent être aussi des durées sur le plan rythmique. Il suffit de définir la valeur de  $c$  (c'est-à-dire le « total chromatique ») en posant, si  $w$  est un mot quelconque de longueur  $d$  :

$$c = h(w) = w_0 + \dots + w_{d-1}.$$

Certains rythmes asymétriques d'Afrique centrale apparaissent comme des mots maximale répartis :

(maximally-even '(3 2 2 3 2 2 2))  
k=1 (3 2 2 3 2 2 2)  
k=2 (5 4 5 5 4 4 5)  
k=3 (7 7 7 7 6 7 7)  
k=4 (10 9 9 9 9 9 9)  
k=5 (12 11 11 12 11 11 12)  
k=6 (14 13 14 14 13 14 14)

Mais ce n'est pas le cas de l'un des rythmes pygmées vérifiant l'imparité rythmique appelé *mokongo* qui n'est pas maximalelement réparti :

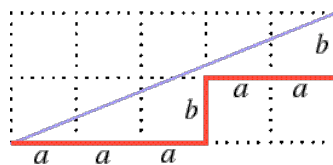
(maximally-even '(3 3 3 2 3 3 2 3 2))  
k=1 (3 3 3 2 3 3 2 3 2)  
k=2 (6 6 5 5 6 5 5 5 5)  
k=3 (9 8 8 8 8 8 7 8 8)  
NOT MAXIMALLY EVEN

**Proposition** ([Demaine et al. 2005]). *Toute chaîne euclidienne est maximalelement répartie.*

On en déduit, en particulier, que le rythme *mokongo* n'est pas une chaîne euclidienne. Cela vient de ce qu'il est de longueur  $n = 9 = 3 \times 3$  et de poids  $k = 24 = 3 \times 8$ , qui ne sont pas premiers entre eux. Pour ces valeurs, la chaîne euclidienne est :

$$E(9, 24) = E(3, 8) = 233.$$

## 2.4 Mots de Christoffel et mode lydien



Dans un plan quadrillé, on note  $a$  et  $b$  les segments unitaires horizontaux et verticaux.

**Définition.** *Le mot de Christoffel de pente  $p/q$  est la suite de  $a$  et  $b$  définissant le chemin reliant les points  $(0, 0)$  et  $(p, q)$  le long du quadrillage en restant le plus haut possible sous la droite passant par ces points.*

Considérons le « mode lydien », c'est-à-dire la suite des touches blanches du piano commençant sur *fa* :

*fa sol la si do ré mi fa*

Thomas Noll 2008 a remarqué qu'en notant  $a$  et  $b$  les intervalles de ton et demi-ton, on obtient :

$a a a b a a b$

c'est-à-dire exactement le mot de Christoffel de pente  $2/5$  représenté sur la figure ci-dessus.

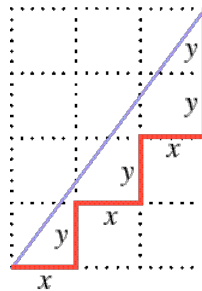
Bien plus, si l'on permute le mode précédent en répartissant les notes selon le cycle des quintes ramenées à l'intérieur de l'octave, on trouve :

*fa do sol ré la mi si fa*

En notant  $x$  et  $y$  les intervalles de quinte ascendante et quarte descendante, on a :

$x y x y x y y$

ce qui donne un nouveau mot de Christoffel de pente  $4/3$  :



Or Thomas Noll a mis en évidence le fait remarquable que ces deux mots de Christoffel sont « duals » l'un de l'autre.

**Définition.** Le dual d'un mot de Christoffel  $w$  de pente  $p/q$  est le mot de Christoffel  $w^*$  de pente  $p^*/q^*$  où  $p^*$  et  $q^*$  sont les inverses de  $p$  et  $q$  dans  $\mathbf{Z}/(p+q)\mathbf{Z}$ .

En effet, on a  $p = 2$ ,  $q = 5$  et  $p + q = 7$  :

L'inverse de 2 est 4 dans  $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$ , car  $2 \times 4 = 8 \approx 1 \pmod{7}$ , donc  $p^* = 4$ .

De même, l'inverse de 5 est 3, car  $5 \times 3 = 15 \approx 1 \pmod{7}$ , donc  $q^* = 3$ .

Les mots de Christoffel ont des propriétés surprenantes liées à la notion de palindrome, c'est-à-dire de mot identique à son image miroir (lu à l'envers) :

Pour le mode lydien  $w = aaabaab$ , on a une double décomposition en palindromes :

- $w = aub$  où  $u$  est un palindrome, soit  $w = a(aabaa)b$ ,
- et  $w = a(rabs)b$  où  $r$  et  $s$  sont deux palindromes, soit  $w = a(a)ab(aa)b$

Pour son mot dual  $w^* = xyxyxyy$ , on a les mêmes décompositions :

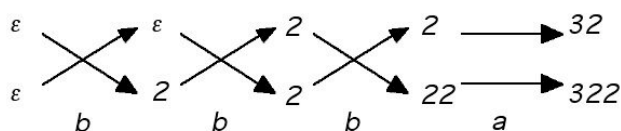
- $w^* = xuy$  où  $u$  est un palindrome, soit  $w^* = x(yxyxy)y$ ,
- et  $w^* = x(rxys)y$  où  $r$  et  $s$  sont deux palindromes, soit  $w^* = x(yxy)xy()y$ .

### 3. Construction des rythmes asymétriques

#### 3.1 Rythmes vérifiant l'imparité rythmique

Soient deux transformations  $a$  et  $b$  de  $\Sigma^* \times \Sigma^*$  dans  $\Sigma^* \times \Sigma^*$  définies par :

$$a(u, v) = (3u, 3v), \quad b(u, v) = (v, 2u).$$



Le rythme 32322 s'écrit  $(32)(322)$  avec  $(32, 322) = abbb(\epsilon, \epsilon)$ .

**Théorème** ([Chemillier & Truchet 2003]). *Un mot  $w$  vérifie l'imparité rythmique si et seulement si il existe une transformation  $\alpha$  obtenue en combinant  $a$  et  $b$  avec un nombre impair de  $b$  telle que  $\alpha(\epsilon, \epsilon) = (u, v)$  avec  $w = uv$  ou  $vu$ .*

Soit  $D = \{w \text{ tels que } w = uv \text{ avec } (u, v) = \alpha(\epsilon, \epsilon) \text{ et } \alpha \text{ ayant un nombre impair de } b\}$ .

**Proposition.** *Pour  $w$  et  $w'$  dans  $D$ , on a  $w$  et  $w'$  conjugués si et seulement si  $\alpha$  et  $\alpha'$  conjugués dans  $\{a, b\}^*$ .*

On note  $n_2$  et  $n_3$  les nombres de 2 et de 3 dans un rythme vérifiant l'imparité rythmique :

**Proposition.** *Le nombre de solutions à l'imparité rythmique pour  $n_3 = 8$  est la somme des carrés.*

**Dem.** Les solutions peuvent être associées à des suites  $\alpha$  de  $a$  et  $b$  d'après le théorème précédent, avec quatre  $a$  et un nombre impair de  $b$ . Soit  $p$  la longueur de  $\alpha$ . Énumérer les solutions consiste à énumérer les  $\alpha$  possibles en plaçant 4 symboles  $a$  parmi  $p$  dans  $\alpha$ , mais en enlevant les permutations circulaires.

Combien y a-t-il de permutations circulaires pour  $\alpha$  ?

Supposons  $\alpha$  non primitif :  $\alpha = \gamma^n$ , avec  $n \geq 2$ . Le nombre de  $a$  dans  $\alpha$  est  $n$  fois le nombre de  $a$  dans  $\gamma$ . Mais 4 est divisible seulement par 2 et 4. Dans ces conditions, le nombre de  $b$  dans  $\alpha$  ne peut pas être impair, ce qui est faux.

D'où  $\alpha$  primitif, donc il a exactement  $p$  permutations circulaires.

Le nombre de solutions est

$$x = \frac{1}{p} C_p^4 = \frac{(p-3)(p-2)(p-1)}{4!}$$

Comme  $n_2$  est impair, on peut écrire  $n_2 = 2k - 1$ , donc  $p = n_2 + 4 = 2k + 3$ , d'où :

$$x = \frac{k(k+1)(2k+1)}{2}$$



## Références

- ouvrages fondamentaux

Lothaire M., *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics, Vol. 17, Addison-Wesley, 1983 (réédité Cambridge University Press, 1997, [chap. 1 disponible en ps](#)).

Lothaire M., *Algebraic Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 2002.

Lothaire M., *Applied Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 2005.

- combinatoire des mots appliquée à la musique

Chemillier M., Periodic musical sequences and Lyndon words, *Soft Computing*, special issue on Formal Systems and Music, G. Assayag, V. Cafagna, M. Chemillier (eds.) **8** (9) (2004) 611-616.

Chemillier M., Truchet C., Computation of words satisfying the "rhythmic oddity property" (after Simha Arom's work), *Information Processing Letters* **86** (5) (2003) 255-261.

Chemillier M., Musique et rythme en Afrique centrale, *Pour la science*, dossier n° 47 « Mathématiques exotiques » (2005) 72-76.

Chemillier M., *Les Mathématiques naturelles*, Paris, Odile Jacob, 2007.

Toussaint Godfried T., The Euclidean algorithm generates traditional musical rhythms, *Proc. of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music and Science*, Banff, Canada, July 31 - August 3 2005.

Ellis John, Frank Ruskey, Joe Sawada, and Jamie Simpson, Euclidean strings, *Theoretical Computer Science*, 301 (2003) 321-340.

Clough John, Jack Douthett, Maximally even sets, *Journal of Music Theory*, 35 (1991) 93-173.

Pressing Jeff, Cognitive Isomorphisms Between Pitch and Rhythm in World Musics: West Africa, the Balkans and Western Tonality, *Studies in Music* (Australia) 17 (1983) 38-61.

Noll Thomas, Sturmian sequences and morphisms: a music-theoretical application, *Journée annuelle de la SMF* (Société Math. de France), 2008, p. 79-102

Demaine Erik D., Francisco Gomez-Martin, Henk Meijer, David Rappaport, Perouz

Taslakian, Godfried T. Toussaint, Terry Winograd, David R. Wood, The Distance Geometry of Music, *20th Bellairs Winter Workshop on Computational Geometry*, Barbados, January 28-February 4, 2005.