

# MMIM Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

Marc Chemillier

Master 2 Atiam (Ircam), 2011-2012

## Notions théoriques en combinatoire des mots

- Conjugaison et mots de Lyndon
  - o Conjugaison
  - o Mots de Lyndon
- Combinatoire des mots appliquée à la musique
  - o Imparité rythmique et contramétrie
  - o Construction des mots vérifiant l'imparité rythmique
  - o Gammes maximalement réparties
  - o Chaînes euclidiennes

## 1. Conjugaison et mots de Lyndon

### 1.1 Conjugaison

On introduit une permutation  $\delta$  de  $\Sigma^*$  en posant :

$$\delta(au) = ua \text{ pour } u \in \Sigma^*, a \in \Sigma,$$

$$\delta(\epsilon) = \epsilon.$$

Cela revient à faire passer la première lettre à la fin du mot.

La *classe de conjugaison* de  $u$  est l'orbite de  $u$  sous l'action de  $\delta$ . C'est l'ensemble des permutations circulaires de  $u$  (ou rotations de  $u$ ).

Exemple : pour le mot  $abaa$

$$\delta(abaa) = baaa$$

$$\delta^2(abaa) = aaab$$

$$\delta^3(abaa) = aaba$$

$$\delta^4(abaa) = abaa$$

Notons que si  $n$  est la longueur de  $u$ , on a toujours  $\delta^n(u) = u$ . L'ensemble des puissances  $\delta^k$  telles que  $\delta^k(u) = u$  est un sous-groupe (= fixateur de  $u$ ) du groupe des permutations de  $\Sigma^*$ , non réduit à l'identité.

**Remarque :** Pour tout mot  $u$ , il existe un unique entier  $d$  minimal non nul tel que les entiers  $k$  vérifiant  $\delta^k(u) = u$  sont exactement les multiples de  $d$  (incluant  $n$ ).

En effet, si  $\Sigma$  est réduit à une seule lettre,  $\delta$  est l'identité, donc  $d = 1$ . Sinon, l'application  $i \rightarrow \delta^i$  est un isomorphisme de  $\mathbf{Z}$  dans le groupe des puissances de  $\delta$  (injectif car s'il y a plus de deux lettres, on ne peut avoir  $\delta^i = \text{Id}$  pour  $i > 0$ ). L'image réciproque du fixateur de  $u$  est un sous-groupe de  $\mathbf{Z}$  monogène de la forme  $d\mathbf{Z}$  avec  $d > 0$ .

Rappelons qu'un mot est primitif s'il n'est pas puissance d'un mot plus court.

**Proposition.** *Un mot primitif  $u$  de longueur  $n$  a exactement  $n$  permutations circulaires distinctes.*

**Dem.** Par l'absurde : supposons que deux permutations circulaires soient égales, c'est-à-dire  $\delta^i(u) = \delta^j(u)$  pour  $0 \leq i < j < n$ .

On a  $\delta^k(u) = u$  pour  $k = j - i < n$ . Soit  $d$  minimal non nul tel que  $\delta^d(u) = u$ . On a  $k$  multiple de  $d < n$  (car  $k < n$ ), et par ailleurs,  $n$  multiple de  $d$ .

On factorise  $u$  en mots de longueur  $d$  (donc strictement plus courts) :

$$u = x_1 x_2 \dots x_q$$

$$\text{Alors } \delta^d(u) = x_2 \dots x_q x_1 = u = x_1 x_2 \dots x_q .$$

Comme  $|x_1| = |x_2| \dots = |x_q|$ , on a  $x_1 = x_2 \dots = x_q$  que l'on note  $x$ . D'où  $u = x^q$ , donc  $u$  n'est pas primitif.

**Corollaire fondamental** ([Lothaire 1983, p. 7, proposition 1.3.2]). *Si deux mots  $u$  et  $v$  commutent  $uv = vu$ , alors ils sont puissances d'un même mot  $u, v \in x^*$ .*

**Dem.** Soient  $n$  et  $k < n$  les longueurs respectives de  $uv$  et de  $u$ .

On a  $\delta^k(uv) = vu = uv$ . Donc  $uv$  n'a pas  $n$  permutations circulaires distinctes. Soit  $d$  minimal non nul tel que  $\delta^d(uv) = uv$ . La proposition précédente montre que  $uv = x^d$ . De plus,  $k$  longueur de  $u$  est multiple de  $d$ , ainsi que  $n$ , donc  $n - k$  longueur de  $v$  est aussi multiple de  $d$ .

Il en résulte  $u = x^{k/d}$  et  $v = x^{(n-k)/d}$ .

## 1.2 Mots de Lyndon

Un *mot de Lyndon* est un mot

- primitif,
- minimal pour l'ordre alphabétique dans sa classe de conjugaison.

Exemples :  $abaa$  est-il un mot de Lyndon ?

-> non, le mot de Lyndon associé est  $aaab$ .

Quel est le mot de Lyndon associé à  $xyxy$  ?

->  $xyxy$

Pour étudier des structures musicales périodiques, les mots de Lyndon fournissent un représentant unique pour chaque classe de conjugaison.

Il existe un algorithme très efficace pour calculer les mots de Lyndon (algorithme de Duval). Cet algorithme repose sur les propriétés suivantes :

**Propriété** ([Lothaire 1983, p. 66, proposition 5.1.3]).  $w$  mot de Lyndon si et seulement si soit  $w$  est une lettre, soit  $w$  est un produit de mots de Lyndon plus courts :

$w = uv$  avec  $u, v$  mots de Lyndon tels que  $u < v$ .

**Théorème** ([Lothaire 1983, p. 67, théorème 5.1.5]). Tout mot non vide  $w$  admet une factorisation unique en mots de Lyndon  $w = u_1u_2\dots u_n$  tels que  $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n$ .

Exemples :

- toutes les factorisations de  $ab$  en mots de Lyndon ?

$(a)(b)$

$(ab)$

Laquelle est décroissante ?

->  $(ab)$  car  $c$ 'est un mot de Lyndon

- toutes les factorisations de  $abaac$  en mots de Lyndon ?

$(a)(b)(a)(a)(c)$

$(ab)(a)(a)(c)$

$(a)(b)(a)(ac)$

$(ab)(a)(ac)$

$(a)(b)(aac)$

$(ab)(aac)$

Laquelle est décroissante ?

->  $(ab)(aac)$

On note que  $abaac$  n'est pas un mot de Lyndon. Par contre,  $aacab$  est un mot de Lyndon et on a bien  $aac < ab$ .

- factorisation décroissante de  $aababbaaba$  ?

-> (aababb)(aab)(a)

**Problème :** Pour définir un représentant unique par classe de conjugaison, il peut paraître étrange de devoir passer par une relation d'ordre arbitraire (= ordre « alphabétique ») comme on le fait pour les mots de Lyndon. En fait, on montre que toute famille de représentants uniques vérifiant les propriétés de factorisation ci-dessus induit un ordre intrinsèque sur les mots de la famille indépendant de l'ordre alphabétique.

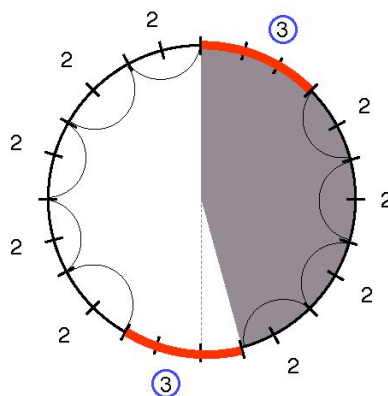
Plus précisément, on définit des **familles circulaires de factorisation maximale unique** (circ.-UMFF) [Daykin, Daykin & Smyth 2009]. Une telle famille  $W$  contient un unique représentant par classe de conjugaison. On montre que la relation  $u <_W v \Leftrightarrow uv \in W$  se prolonge en une relation d'ordre intrinsèque sur  $W$  avec laquelle on a les mêmes propriétés de décomposition que ci-dessus.

- Dans le cas où les représentants uniques sont les éléments minimaux d'un ordre arbitraire, cet ordre peut coïncider avec l'ordre intrinsèque (cas des mots de Lyndon = minimaux pour l'ordre « alphabétique » qui coïncide avec l'ordre intrinsèque).
- Mais on peut définir une telle famille avec un ordre arbitraire **qui ne coïncide pas** avec l'ordre intrinsèque.

Dans la suite, on convient que les indices des lettres d'un mot sont comptés circulairement, c'est-à-dire que si  $n$  est la longueur de ce mot, l'ensemble des indices est identifié à  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Cela permet d'écrire  $i + j$  à la place de  $i + j \bmod n$ .

## 2. Combinatoire des mots appliquée à la musique

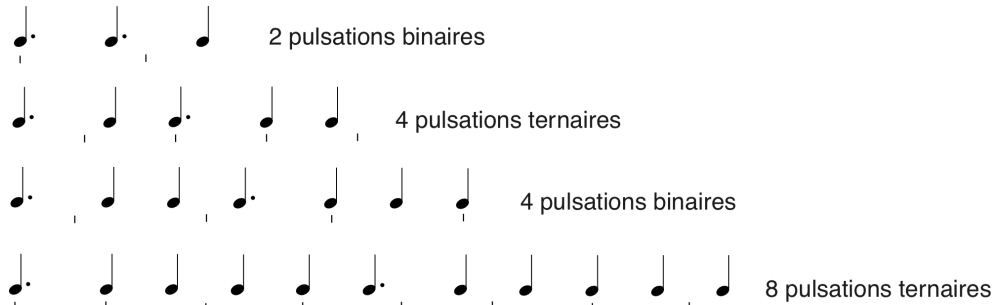
### 2.1 Rythmes asymétriques vérifiant « l'imparité rythmique »



**Définition.** Un mot  $u$  sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  vérifie l'imparité rythmique si aucune de ses permutations circulaires ne se factorise en deux mots de même longueur commençant par 1.

Remarque : La définition n'a de sens que pour des mots **de longueur paire  $2k$**  (car si la longueur est impaire, on ne peut factoriser en deux mots de même longueur).

Les rythmes asymétriques africains sont toujours liés à une pulsation sous-jacente régulière :



Une pulsation  $p$  = entier divisant  $k$

-> on peut factoriser le mot de longueur  $2k$  en facteurs de longueur  $p$

**Propriété.** *Un mot  $u$  de longueur  $2k$  sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  vérifie l'imparité rythmique si et seulement si pour toute pulsation  $p \geq 2$  divisant  $k$ , et pour toute factorisation d'une permutation circulaire de  $u$  en mots de longueur  $p$ , il y a au plus une moitié de facteurs commençant par 1.*

**Dem.** C.S. Evidente pour  $p = k$ . Dans les factorisations en mots de longueur  $k$ , il y a deux facteurs dont un au plus commence par 1, d'où l'imparité rythmique.

C.N. Soit  $k = pq$  et  $(v_1 \dots v_q)(v_{q+1} \dots v_{2q})$  une factorisation d'une permutation circulaire de  $u$  en mots de longueur  $p$ . On note  $E = \{v_i, v_i \text{ commence par } 1\}$ . On groupe les facteurs par paires  $P_i = \{v_i, v_{i+q}\}$ . Pour  $1 \leq i \leq q$ , c'est une partition de l'ensemble des facteurs. Donc  $E$  est l'union disjointe des intersections  $P_i \cap E$ . Mais l'imparité rythmique implique, pour chaque paire,  $\text{card}(P_i \cap E) \leq 1$ . Donc  $\text{card}(E) \leq q$ , soit au plus la moitié des facteurs commençant par 1.

Remarque : Cette propriété traduit une idée de **contramétrie** (moins de la moitié des attaques coïncident avec la pulsation). Mais cela ne suffit pas à donner un modèle satisfaisant de la contramétrie :

- s'il n'y a qu'un seul 1, par exemple 10000000

-> ça vérifie l'imparité rythmique, mais est-ce contramétrique ?

-> on voit que pour parler de contramétrie, il faut des attaques **en dehors de la pulsation.**

- si les 1 sont groupés ensemble, par exemple 11110000

-> ça vérifie l'imparité rythmique, mais ce n'est pas vraiment contramétrique.

-> il faut une **répartition maximale** des attaques sur l'ensemble des pulsations

Dans les rythmes africains, cette répartition est donnée « empiriquement » par une condition supplémentaire : les durées sont égales à 2 ou 3.

-> mais est-ce la seule manière de capter cette notion de « répartition maximale » ?

- si les 1 sont répartis de manière périodique, mais avec une période qui ne divise pas  $k$  :

(10010010)(10010010)(10010010)

Dans les rythmes africains, il y a une autre condition : la pulsation est déterminée par la durée totale qui est une puissance de 2 à un facteur 3 près

- soit  $2^n$  ( $n \geq 2$ ), auquel cas la pulsation est  $p = 4$ ,
- soit  $2^n \times 3$  ( $n \geq 2$ ), auquel cas la pulsation est  $p = 3$ .

La factorisation selon cette pulsation  $p = 3$  donnerait :

(100)(100)(101)(001)(001)(010)(010)(010) -> 3 pulsations avec une attaque, 5 sans attaque

Si les durées sont 2 ou 3, on peut considérer l'alphabet  $\Sigma = \{2, 3\}$  et on étudie les rythmes qui sont des mots de  $\Sigma^*$ . Le poinds  $h(w)$  d'un mot  $w$  est la somme de ses chiffres.

**Définition.** Un mot  $w$  sur l'alphabet  $\{2, 3\}$  vérifie l'imparité rythmique (au sens restreint aux durées 2 et 3) si aucune de ses permutations circulaires ne se factorise en deux mots de même somme, c'est-à-dire de la forme  $uv$  avec  $h(u) = h(v)$ .

Exemple :  $w = 32322$

(32)(322)	$h(32)=5, h(322)=7$
(23)(223)	$h(23)=5, h(223)=7$
(32)(232)	$h(32)=5, h(232)=7$
(223)(23)	$h(223)=7, h(23)=5$
(232)(32)	etc.

Remarques : Si le poids total du mot est impair, on ne peut avoir deux facteurs de même poids, donc la définition est triviale. La définition n'a de sens que si le poids est pair, donc il faut **un nombre pair de 3**.

**Propriété.** Les mots rythmiquement impairs sur  $\{2, 3\}$  ayant seulement deux durées 3 sont nécessairement de la forme :

$2^n 3 2^{n-1} 3$  (à une rotation près).

**Dem.** Avec deux durées 3, la différence de longueur entre les facteurs de durées 2 qui les séparent doit être exactement égale à 1. Par l'absurde, supposons qu'elle soit nulle, ou supérieure ou égale à 2. On distingue selon qu'elle est paire  $2k$ , ou impaire  $2k + 3$  avec  $k \geq 0$ , et on trouve dans chaque cas une rotation équilibrée en passant  $2^k$  à la fin :

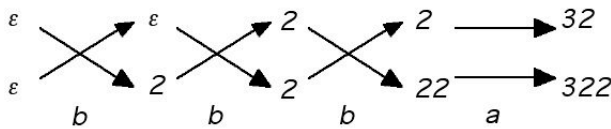
- si la différence est paire  $w = 2^n 3 2^{n-2k} 3$  -> rotation équilibrée  $(2^{n-k} 3)(2^{n-2k} 3 2^k)$
- si la différence est impaire  $w = 2^n 3 2^{n-2k-3} 3$  -> rotation équilibrée  $(2^3 2^{n-k-3})(3 2^{n-2k-3} 3 2^k)$  car  $h(2^3) = h(222) = h(33)$

**Corollaire.** Avec deux durées 3, les mots rythmiquement impairs sont uniques pour une longueur (à une rotation près).

## 2.2 Construction des rythmes vérifiant l'imparité rythmique

Soient deux transformations  $a$  et  $b$  de  $\Sigma^* \times \Sigma^*$  dans  $\Sigma^* \times \Sigma^*$  définies par :

$$a(u, v) = (3u, 3v), \quad b(u, v) = (v, 2u).$$



Le rythme 32322 s'écrit  $(32)(322)$  avec  $(32, 322) = abbb(\epsilon, \epsilon)$ .

**Théorème** ([Chemillier & Truchet 2003]). *Un mot  $w$  vérifie l'imparité rythmique si et seulement s'il existe une transformation  $\alpha$  obtenue en combinant  $a$  et  $b$  avec un nombre impair de  $b$  telle que  $\alpha(\epsilon, \epsilon) = (u, v)$  avec  $w = uv$  ou  $vu$ .*

Soit  $D = \{w \text{ tels que } w = uv \text{ avec } (u, v) = \alpha(\epsilon, \epsilon) \text{ et } \alpha \text{ ayant un nombre impair de } b\}$ .

**Proposition.** *Pour  $w$  et  $w'$  dans  $D$ , on a :*

*$w$  et  $w'$  conjugués si et seulement si  $\alpha$  et  $\alpha'$  conjugués dans  $\{a, b\}^*$ .*

Pour calculer un représentant par classe de conjugaison de mots  $w$  vérifiant l'imparité rythmique, il suffit de calculer les mots de Lyndon pour les mots  $\alpha$  sur  $\{a, b\}^*$ .

On note  $n_2$  et  $n_3$  les nombres de 2 et de 3 dans un rythme vérifiant l'imparité rythmique :

**Proposition.** *Le nombre de solutions à l'imparité rythmique pour  $n_3 = 8$  est la somme des carrés.*

**Dem.** Les solutions peuvent être associées à des suites  $\alpha$  de  $a$  et  $b$  d'après le théorème précédent, avec quatre  $a$  et un nombre impair de  $b$ . Soit  $p$  la longueur de  $\alpha$ . Énumérer les solutions consiste à énumérer les  $\alpha$  possibles en plaçant 4 symboles  $a$  parmi  $p$  dans  $\alpha$ , mais en enlevant les permutations circulaires.

Combien y a-t-il de permutations circulaires pour  $\alpha$  ?

Supposons  $\alpha$  non primitif :  $\alpha = \gamma^n$ , avec  $n \geq 2$ . Le nombre de  $a$  dans  $\alpha$  est  $n$  fois le nombre de  $a$  dans  $\gamma$ . Mais 4 est divisible seulement par 2 et 4. Dans ces conditions, le nombre de  $b$  dans  $\alpha$  ne peut pas être impair, ce qui est faux.

D'où  $\alpha$  primitif, donc il a exactement  $p$  permutations circulaires.

Le nombre de solutions est

$$x = \frac{1}{p} C_p^4 = \frac{(p-3)(p-2)(p-1)}{4!}$$

Comme  $n_2$  est impair, on peut écrire  $n_2 = 2k - 1$ , donc  $p = n_2 + 4 = 2k + 3$ , d'où :

$$x = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Il existe un lien très curieux entre l'asymétrie de ces rythmes et l'asymétrie de la gamme diatonique (touches noires du clavier séparées par 2, 3, 2, 2, 3 demi-tons), qui a été mis en évidence pour la première fois, semble-t-il, par Jeff Pressing 1983.

De nombreux travaux ont étudié ces structures asymétriques en introduisant des concepts de combinatoire des mots.

### 2.3 Gammes maximalelement réparties

Le concept de « gamme maximalelement répartie » (*maximally even scale*) a été défini par Clough & Douthett 1991. Il est lié à d'autres concepts comme celui de « gamme bien formée » (*well-formed scale*) de Carey & Clampitt 1989 et conduit à introduire les séries de Fourier. On en donne ici une définition en termes de combinatoire des mots.

$\Sigma =$  ensemble des entiers naturels  $\mathbf{N}$

gamme = mot  $w$  donnant les intervalles entre degrés consécutifs exprimés en nombre de « demi-tons » du total chromatique (pour la dernière note, on prend l'intervalle avec l'octave supérieur de la première note).

mots cumulés = obtenus en additionnant deux à deux, puis trois à trois, etc. les éléments consécutifs de  $w$  considéré circulairement, jusqu'à faire la somme de tous ses éléments.

-> donne les intervalles « diatoniques » de la gamme : « tierce », « quarte », etc. jusqu'à l'« octave »

Exemple : gamme diatonique (= touches blanches du piano)

(cumulate '(2 2 1 2 2 2 1))

k=1 (2 2 1 2 2 2 1)

k=2 (4 3 3 4 4 3 3)

k=3 (5 5 5 6 5 5 5)

k=4 (7 7 7 7 7 7 6)



k=5 (9 9 8 9 9 8 8)

k=6 (11 10 10 11 10 10 10)

k=7 (12 12 12 12 12 12 12)

Que remarque-t-on ?

-> à part l'octave (12), les intervalles diatoniques ont **toujours deux formes** : majeur / mineur, juste / augmenté, juste / diminué

Si  $w$  est de longueur  $d$ , les mots cumulés  $w(x)$  sont aussi de longueur  $d$  avec pour  $1 \leq x \leq d$  (en notant les indices circulairement) :

$$w(x)_i = w_i + \dots + w_{i+x-1}.$$

**Définition.** Une gamme est maximalement répartie si tous les mots cumulés  $w(x)$  contiennent au plus deux entiers différents et consécutifs.

Remarque :

• Que se passe-t-il si le mot  $w$  ne contient qu'un seul entier (ex : gamme par tons) ?

-> Il en est de même de tous les mots cumulés  $w(x)$ .

Les modes correspondant à une division égale de l'octave sont des cas particuliers de gammes maximalement réparties. Par exemple, la « gamme par tons » correspond à  $w = 222222$ .

• On voit facilement que si pour  $x < d$ , le mot cumulé  $w(x)$  est constant (ne contient qu'un seul entier), alors  $w$  est périodique (non primitif).

• Si  $w$  ne contient que deux entiers consécutifs, alors les entiers apparaissant dans les mots cumulés sont nécessairement des entiers consécutifs.

Exemples de mots maximalement répartis :

- gamme diatonique (touches blanches)
- gamme pentatonique (touches noires)
- certains rythmes asymétriques d'Afrique centrale

**Propriété.** Si  $w$  est un mot maximalement réparti sur  $\{2, 3\}$  avec un nombre pair de 3 et un nombre impair de 2, alors  $w$  est rythmiquement impair.

**Dem.** Par l'absurde, supposons que  $w$  ne soit pas rythmiquement impair. Le poids de  $w$  est pair, donc on a une rotation de  $w$  se factorisant en  $uv$  tels que  $h(u) = h(v) = k$ . Comme  $w$  est de longueur impaire, supposons  $|u| < |v|$  (si c'est l'inverse on fait la rotation  $vu$ ), c'est-à-dire  $v = zx$  avec  $|z| = |u| = d$  et  $x$  comporte au moins un symbole égal à 2 ou 3, donc  $h(z) \leq k - 2$ .

Le mot cumulé  $w(d)$  contient  $h(u)$  et  $h(z)$ , donc deux entiers qui ne sont pas consécutifs, donc  $w$  n'est pas maximalelement réparti.

La réciproque n'est pas vraie : certains rythmes vérifiant l'imparité rythmique ne sont pas maximalelement répartis :

-> le rythme *mokongo* 333233232 n'est pas maximalelement réparti

(cumulate '(3 3 3 2 3 3 2 3 2))

k=1 (3 3 3 2 3 3 2 3 2)

k=2 (6 6 5 5 6 5 5 5 5)

k=3 (9 8 8 8 8 8 7 8 8) NOT MAXIMALLY EVEN

k=4 (11 11 11 10 11 10 10 11 11)

k=5 (14 14 13 13 13 13 13 14 13)

k=6 (17 16 16 15 16 16 16 16 16) NOT MAXIMALLY EVEN

k=7 (19 19 18 18 19 19 18 19 19)

k=8 (22 21 21 21 22 21 21 22 21)

k=9 (24 24 24 24 24 24 24 24 24)

-> de même, le rythme 3332323332232 ne l'est pas

-> mais d'autres le sont : 3323323233232

**Corollaire.** Si un mot  $w$  sur  $\{2, 3\}$  a deux 3 et un nombre impair de 2, alors les conditions sont équivalentes :

(i)  $w$  est maximalelement réparti,

(ii)  $w$  est rythmiquement impair,

(iii)  $w$  est de la forme  $2^n 3 2^{n-1} 3$  (à une rotation près).

Dem. (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (ii) déjà vu.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Les facteurs de  $w$  de longueur  $i \leq n$  contiennent soit aucun 3 (facteur  $2^n$ ), soit un seul 3, mais pas deux. Les facteurs de longueur  $i \geq n + 1$  contiennent nécessairement un 3, ou éventuellement deux 3, mais pas plus. Donc les poids ne peuvent prendre que deux valeurs consécutives.

Remarques :

- La condition sur les mots cumulés empêche les situations **très déséquilibrées** 11110000

-> elle oblige à une « répartition maximale »

- En revanche, elle n'empêche pas les situations **très régulières** 1111111, ou 10101010

-> dans ce cas, il existe un pulsation telle qu'on peut factoriser le mot en facteurs qui commencent tous par 1

(10)(10)(10)(10)

-> la condition sur les mots cumulés ne suffit pas à caractériser la **contramétrie**

## 2.4 Chaînes euclidiennes

Godfried Toussaint a mis en évidence en 2005 [BRIDGES] une relation très surprenante entre les rythmes maximalement répartis et la notion de chaîne euclidienne introduite par [Ellis *et al.* 2003].

$\Sigma =$  ensemble des entiers naturels  $\mathbf{N}$

**Définition.** Un mot  $w = w_0w_1\dots w_{n-1}$  de  $\Sigma^*$  est une chaîne euclidienne si  $w$  est réduit à un seul élément (c'est-à-dire un entier), ou si en ajoutant 1 à  $w_0$  et en retirant 1 à  $w_{n-1}$ , on obtient une rotation  $\delta^*(w)$  de  $w$ .

Exemple :

- $w = 22323$                       ->  $t(w) = (2 + 1)232(3 - 1) = 32322 = \delta^2(22323)$
- $z = 001010010101$             ->  $t(z) = (0 + 1)0101001010(1 - 1)$   
 $= 101010010100 = \delta^7(001010010101)$

**Propriété.** Une chaîne euclidienne est un mot de Lyndon.

Quel rapport entre les mots 22323 et 001010010101 ?

-> Si l'on représente des rythmes avec attaques (1) et silence (0), ils apparaissent comme duals l'un de l'autre, c'est-à-dire qu'ils correspondent à deux manières de coder un même rythme (à une rotation près).

On introduit deux morphismes sur  $\Sigma^*$  définis pour chaque « lettre » de  $\Sigma$  (c'est-à-dire chaque entier  $x$ ) :

$$I(x) = x + 1,$$

$$X(x) = 01^x \text{ (c'est-à-dire le mot commençant par 0 suivi de 1 répété } x \text{ fois).}$$

Exemple :  $I(024) = 135$ ,  $X(024) = 001101111$

**Théorème de décomposition** [Ellis *et al.* 2003]. *Un mot  $w$  de  $\Sigma^*$  de longueur  $n$  et de poids  $k$  est une chaîne euclidienne si et seulement si  $w = E(n, k)$  où  $E$  est la fonction définie par :*

$$\begin{aligned} E(n, k) &= XE(n - k, k) \text{ si } n > k, \\ &= IE(n, k - n) \text{ si } n < k, \\ &= 1 \text{ si } n = k. \end{aligned}$$

**Corollaire.** *Il n'existe qu'une seule chaîne euclidienne de longueur  $n$  et de poids  $k$  donnés notée  $E(n, k)$ .*

Exemple :

$$\begin{aligned} E(13, 5) &= XE(13 - 5, 5) = XE(8, 5) = XXE(3, 5) = XXIE(3, 2) = XXIXE(1, 2) = XXIXIE(1, 1) \\ &= XXIXI(1) = XXIX(2) = XXI(011) = XX(122) = X(01011011) = 0010010100101. \end{aligned}$$

On obtient un mot de Lyndon  $w$  de longueur 13 et de poids 5 tel que :

$$t(w) = 1010010100100 = \delta^5(w)$$

$$\begin{aligned} E(5, 13) &= IE(5, 8) = IIE(5, 3) = IIXE(2, 3) = IIXIE(2, 1) = IIXIXE(1, 1) = IIXIX(1) = IIXI(01) \\ &= IIX(12) = I(01011) = I(12122) = 23233. \end{aligned}$$

Ce mot de longueur 5 et de poids 13 est en quelque sorte le « dual » du précédent.

**Théorème** ([Demaine *et al.* 2005]). *Une mot  $w$  de  $\Sigma^*$  est maximalement réparti si et seulement si à une rotation près,  $w$  est une chaîne euclidienne.*

**Corollaire.** *A une rotation près, il n'existe qu'un seul mot maximalement réparti de longueur  $n$  et de poids  $k$  donnés.*

**Corollaire.** *A une rotation près, il n'existe qu'un seul mot maximalement réparti sur l'alphabet  $\{2, 3\}$  ayant un nombre donné de 2 et 3.*

Remarques :

- Dans le cas des mots rythmiquement impairs, il n'y a **pas unicité** pour un nombre donné de 2 et 3, exemple :

333233232 (*mokongo*) et 333233322

(sauf quand il n'y a que deux durées 3, où l'on a unicité de la forme  $2^n 3^{2^{n-1}}$ ).

- Les rythmes 333233232 (*mokongo*) et 333233322 ne sont pas maximalement répartis.

Qu'en est-il de la chaîne euclidienne de même longueur 9 et de même poids 24 ?

-> Le problème est que 9 et 24 ne sont pas premiers entre eux ( $9 = 3 \times 3$  et  $24 = 3 \times 8$ ). Pour ces valeurs, la chaîne euclidienne est :

$$E(9, 24) = E(3, 8) = 233.$$

-> Même si la longueur et le poids sont premiers entre eux, on peut avoir plusieurs rythmes impairs, par exemple pour  $n = 7$  et  $p = 18$  :

3323322 et 3323232

Mais il n'y en a qu'un seul qui est une chaîne euclidienne  $E(7, 18) = 2323233$ .

• Les rythmes de la forme  $2^n 32^{n-1} 3$  sont à la fois rythmiquement impairs et maximalement répartis. Mais ils sont aussi mots de Lyndon, donc ils vérifient la propriété des chaînes euclidiennes :

$$t(2^n 32^{n-1} 3) = (2+1)2^{n-1}32^{n-1}(3-1) = 32^{n-1}32^n = 8^n(2^n 32^{n-1} 3)$$

Le calcul des rythmes africains ayant deux durées 3 se fait avec la fonction  $E$ :

$$E(3, 8) = 233$$

$$E(5, 12) = 22323$$

$$E(7, 16) = 2223223$$

$$E(9, 20) = 222232223$$

$$E(11, 24) = 22222322223.$$

## Références

- ouvrages et articles généraux

Lothaire M., *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics, Vol. 17, Addison-Wesley, 1983 (réédité Cambridge University Press, 1997) ([biblio](#)).

Duval, Jean-Pierre, Génération d'une section des classes de conjugaison et arbre des mots de Lyndon de longueur bornée, *Theoretical Computer Science*, 60 (3) (1988) 255-283.

Daykin D.E., Daykin J., Smyth W.F., Combinatorics of Unique Maximal Factorization Families (UMFFs), *Fundamenta Informaticae, Special Issue on Stringology*, 97 (3) (2009) 295-309 ([biblio](#)).

- combinatoire des mots appliquée à la musique

Chemillier M., Periodic musical sequences and Lyndon words, *Soft Computing*, special issue on Formal Systems and Music, G. Assayag, V. Cafagna, M. Chemillier (eds.) 8 (9) (2004) 611-616 ([biblio](#)).

Chemillier M., Truchet C., Computation of words satisfying the "rhythmic oddity property" (after Simha Arom's work), *Information Processing Letters* **86** (5) (2003) 255-261 ([biblio](#)).

Chemillier M., Musique et rythme en Afrique centrale, *Pour la science*, dossier n° 47 « Mathématiques exotiques » (2005) 72-76, repris sur le site *CultureMATH* de l'ENS Ulm : <http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/chemillier05-09/math-musique-afriquecentrale.html>

Chemillier M., *Les Mathématiques naturelles*, Paris, Odile Jacob, 2007.

Bouchet André, Imparité rythmique, *CultureMATH*, 2 octobre 2010 :

<http://www.math.ens.fr/culturemath/math/articles/Bouchet2010/imparite-rythmique.html>

Toussaint Godfried T., The Euclidean algorithm generates traditional musical rhythms, *Proc. of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music and Science*, Banff, Canada, July 31 - August 3 2005 ([biblio](#)).

Ellis John, Frank Ruskey, Joe Sawada, and Jamie Simpson, Euclidean strings, *Theoretical Computer Science*, 301 (2003) 321-340 ([biblio](#)).

Clough John, Jack Douthett, Maximally even sets, *Journal of Music Theory*, 35 (1991) 93-173 ([biblio](#)).

N. Carey, D. Clampitt, Aspects of Well-Formed Scales, *Music Theory Spectrum* 11(2) (1989) 187-206 ([biblio](#)).

Pressing Jeff, Cognitive Isomorphisms Between Pitch and Rhythm in World Musics: West Africa, the Balkans and Western Tonality, *Studies in Music* (Australia) 17 (1983) 38-61 ([biblio](#)).

Demaine, Erik D., Francisco Gomez-Martin, Henk Meijer, David Rappaport, Perouz Taslakian, Godfried T. Toussaint, Terry Winograd, David R. Wood, The distance geometry of music, *Computational Geometry: Theory and Applications*, 42 (2009) 429-454 ([biblio](#)).