MMIM Modèles mathématiques
pour l'informatique musicale

Marc Chemillier

Master 2 Atiam (Ircam), 2012-2013

Notions théoriques en combinatoire des mots

- Conjugaison et mots de Lyndon
  - Conjugaison
  - Mots de Lyndon
- Combinatoire des mots appliquée à la musique
  - Imparité rythmique et contramétricité
  - Construction des mots vérifiant l'imparité rythmique
  - Gammes maximalement réparties

1. Conjugaison et mots de Lyndon

1.1 Conjugaison

On introduit une permutation δ de Σ^* en posant :

$\delta(au) = ua$ pour $u \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$,

$\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Cela revient à faire passer la première lettre à la fin du mot.

La *classe de conjugaison* de u est l'orbite de u sous l'action de δ. C'est l'ensemble des permutations circulaires de u (ou rotations de u).

Exemple : pour le mot *abaa*

$\delta(abaa) = baaa$

$\delta^2(abaa) = aaab$

$\delta^3(abaa) = aaba$

$\delta^4(abaa) = abaa$

• le nombre de permutations circulaires d'un mot est-il toujours égal à sa longueur ?

→ non, *abab* n'a que 2 permutations circulaires : $\delta(abab) = baba$, $\delta^2(abab) = abab$

Notons que si n est la longueur de u, on a toujours $\delta^n(u) = u$.

Rappelons qu'un mot est primitif s'il n'est pas puissance d'un mot plus court.

Proposition 1. *Pour tout mot u, il existe un unique entier d minimal non nul tel que les entiers k vérifiant $\delta^k(u) = u$ sont exactement les multiples de d (incluant n).*

Dem. Si Σ est réduit à une seule lettre, δ est l'identité, donc $d = 1$. Sinon, l'application $i \to \delta^i$ est un morphisme de **Z** dans le groupe des permutations de Σ^*. Il est injectif car s'il y a plus de deux lettres, on ne peut avoir $\delta^i = \mathrm{Id}$ pour $i > 0$.

L'ensemble des puissances δ^k telles que $\delta^k(u) = u$ est un sous-groupe (= fixateur de u) du groupe des permutations de Σ^*. L'image réciproque du fixateur de u est un sous-groupe de **Z** non réduit à $\{0\}$ car contenant n. Or les sous-groupes de **Z** sont monogène de la forme $d\mathbf{Z}$ avec $d > 0$ s'ils ne sont pas réduits à $\{0\}$. Par isomorphisme, le fixateur de u est monogène engendré par δ^d.

Proposition 2. *Un mot primitif u de longueur n a exactement n permutations circulaires distinctes.*

Dem. Par l'absurde : supposons que deux permutations circulaires soient égales, c'est-à-dire $\delta^i(u) = \delta^j(u)$ pour $0 \leq i < j < n$.

On a $\delta^k(u) = u$ pour $k = j - i < n$. Si δ^d est le générateur du fixateur de u, k multiple de d, et comme $k < n$, d est strictement inférieur à n.

Comme n est toujours multiple de d, on factorise u en mots de longueur d (donc strictement plus courts) :

$u = x_1x_2\ldots x_q$

Alors $\delta^d(u) = x_2\ldots x_qx_1 = u = x_1x_2\ldots x_q$.

Comme $|x_1| = |x_2|\ldots = |x_q|$, on a $x_1 = x_2\ldots = x_q$ que l'on note x. D'où $u = x^q$, donc u n'est pas primitif.

Proposition 3 ([Lothaire 1983, p. 7, proposition 1.3.2]). *Si deux mots u et v commutent uv = vu, alors ils sont puissances d'un même mot u, v $\in x^*$.*

Dem. Soient n et $k < n$ les longueurs respectives de uv et de u.

On a $\delta^k(uv) = vu = uv$. Donc uv n'a pas n permutations circulaires distinctes. Soit δ^d le générateur du fixateur de uv. La proposition précédente montre que $uv = x^d$.

De plus, δ^k appartient au fixateur de uv, donc k longueur de u est multiple de d, d'où $u = x^{k/d}$.

Par ailleurs δ^n appartient aussi au fixateur de uv, donc n est multiple de d, donc $n - k$ longueur de v l'est aussi, d'où $v = x^{(n-k)/d}$.

1.2 Mots de Lyndon

Un *mot de Lyndon* est un mot

• primitif,

• minimal pour l'ordre alphabétique dans sa classe de conjugaison.

Exemples : *abaa* est-il un mot de Lyndon ?

-> non, le mot de Lyndon associé est *aaab*.

Quel est le mot de Lyndon associé à *xyxxy* ?

-> *xxyxy*

Pour étudier des structures musicales périodiques, les mots de Lyndon fournissent un représentant unique pour chaque classe de conjugaison.

Il existe un algorithme très efficace pour calculer les mots de Lyndon (algorithme de Duval). Cet algorithme repose sur les propriétés suivantes :

Propriété ([Lothaire 1983, p. 66, proposition 5.1.3]). *w mot de Lyndon si et seulement si soit w est une lettre, soit w est un produit de mots de Lyndon plus courts :*

w = uv avec u, v mots de Lyndon tels que u < v.

Théorème ([Lothaire 1983, p. 67, théorème 5.1.5]). *Tout mot non vide w admet une factorisation unique en mots de Lyndon* $w = u_1u_2...u_n$ *tels que* $u_1 \geq u_2 \geq ... \geq u_n$.

Exemples :

• toutes les factorisations de *ab* en mots de Lyndon ?

(*a*)(*b*)

(*ab*)

Laquelle est décroissante ?

→ (*ab*) car c'est un mot de Lyndon

• toutes les factorisations de *abaac* en mots de Lyndon ?

(*a*)(*b*)(*a*)(*a*)(*c*)

(*ab*)(*a*)(*a*)(*c*)

(*a*)(*b*)(*a*)(*ac*)

(*ab*)(*a*)(*ac*)

(*a*)(*b*)(*aac*)

(*ab*)(*aac*)

Laquelle est décroissante ?

→ (ab)(aac)

On note que *abaac* n'est pas un mot de Lyndon. Par contre, *aacab* est un mot de Lyndon et on a bien $aac < ab$.

• factorisation décroissante de *aababbaaba* ?

→ ($aababb$)(aab)(a)

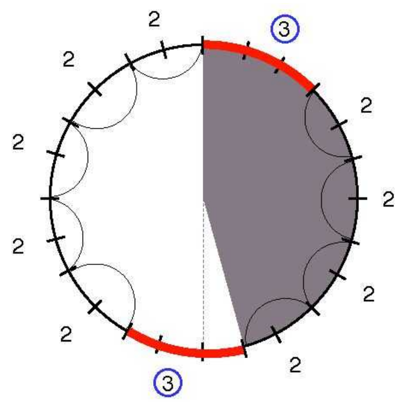
→ il faut chercher le plus long mot de Lyndon à gauche (comme préfixe du mot)

Attention : dans cet exemple, *a, ab, aab* sont des mots de Lyndon, *aaba* ne l'est pas, mais *aabab* et *aababb* le sont → il faut regarder plus loin...

Dans la suite, on convient que les indices des lettres d'un mot sont comptés circulairement, c'est-à-dire que si n est la longueur de ce mot, l'ensemble des indices est identifié à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Cela permet d'écrire $i + j$ à la place de $i + j \bmod n$.

2. Combinatoire des mots appliquée à la musique

2.1 Imparité rythmique

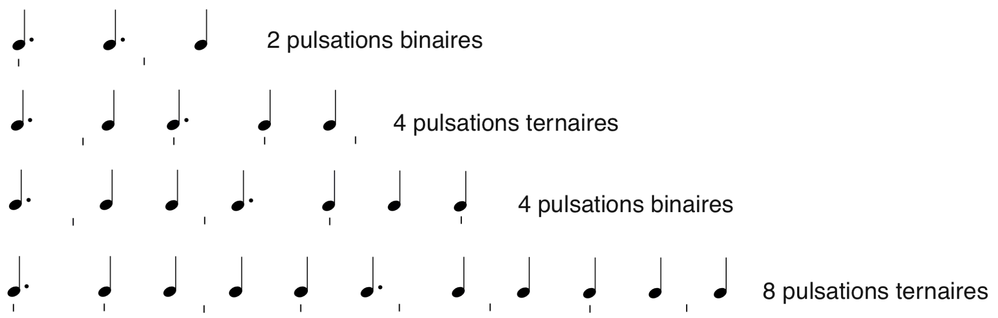


Définition. *Un mot u sur l'alphabet {0, 1} vérifie l'imparité rythmique si aucune de ses permutations circulaires ne se factorise en deux mots de même longueur commençant par 1.*

Remarque : La définition n'a de sens que pour des mots **de longueur paire 2*k*** (car si la longueur est impaire, on ne peut factoriser en deux mots de même longueur).

2.2 Pulsation et contramétricité

Les rythmes asymétriques africains sont toujours liés à <u>une pulsation sous-jacente régulière</u> :



Une <u>pulsation</u> p = entier divisant k

-> on peut factoriser le mot de longueur $2k$ en facteurs de longueur p

Propriété. *Un mot u de longueur 2k sur l'alphabet {0, 1} vérifie l'imparité rythmique si et seulement si pour toute pulsation $p \geq 2$ divisant k, et pour toute factorisation d'une permutation circulaire de u en mots de longueur p, il y a au plus <u>une moitié de facteurs commençant par 1</u>.*

Dem. C.S. Evidente pour $p = k$. Dans les factorisations en mots de longueur k, il y a deux facteurs dont un au plus commence par 1, d'où l'imparité rythmique.

C.N. Soit p divisant k, $k = pq$ et $(v_1 \ldots v_q)(v_{q+1} \ldots v_{2q})$ une factorisation d'une permutation circulaire de u en mots de longueur p. On note $E = \{v_i,\ v_i$ commence par $1\}$. On groupe les facteurs par paires $P_i = \{v_i, v_{i+q}\}$. Pour $1 \leq i \leq q$, c'est une partition de l'ensemble des facteurs. Donc E est l'union disjointe des intersections $P_i \cap E$. Mais l'imparité rythmique implique, pour chaque paire, $\mathrm{card}(P_i \cap E) \leq 1$. Donc $\mathrm{card}(E) \leq q$, soit au plus la moitié des facteurs commençant par 1.

Remarque : Cette propriété traduit une idée de <u>**contramétricité**</u> (moins de la moitié des attaques coïncident avec la pulsation). Mais cela ne suffit pas à donner un modèle satisfaisant de la contramétricité :

• s'il n'y a qu'un seul 1, par exemple 10000000

-> ça vérifie l'imparité rythmique, mais est-ce contramétrique ?

-> on voit que pour parler de contramétricité, il faut des attaques <u>**en dehors de la pulsation**</u>.

• si les 1 sont groupés ensemble, par exemple 11110000

-> ça vérifie l'imparité rythmique, mais ce n'est pas vraiment contramétrique.

-> il faut une <u>**répartition maximale**</u> des attaques sur l'ensemble des pulsations

Dans les rythmes africains, cette répartition est donnée « empiriquement » par une condition supplémentaire : <u>les durées sont égales à 2 ou 3</u>.

-> mais est-ce la seule manière de capter cette notion de « répartition maximale » ?

• si les 1 sont répartis de manière périodique, mais avec une période qui ne divise pas k (par exemple un période 8 pour $k = 12$ et une longueur 24) :

(10010010)(10010010)(10010010)

→ pas contramétrique par rapport à cette factorisation de longueur 8

Dans les rythmes africains, il y a une autre condition : la pulsation est déterminée par <u>la durée totale qui est une puissance de 2 à un facteur 3 près</u>

- soit 2^n ($n \geq 2$), auquel cas la pulsation est $p = 4$,
- soit $2^n \times 3$ ($n \geq 2$), auquel cas la pulsation est $p = 3$.

donc si la durée totale est multiple de 3, la pulsation est nécessairement <u>ternaire</u> (multiple de 3)

La factorisation selon cette pulsation $p = 3$ donnerait :

(100)(100)(101)(001)(001)(010)(010)(010) -> 3 pulsations avec une attaque, 6 sans attaque

et de même pour les trois rotations

→ contramétrique (moins de la moitié des attaques coïncident avec la pulsation)

2.3 Cas particulier des mots sur 2 et 3

Si les durées sont 2 ou 3, on peut considérer l'alphabet $\Sigma = \{2, 3\}$ et on étudie les rythmes qui sont des mots de Σ^*. Le <u>poids</u> $h(w)$ d'un mot w est la somme de ses chiffres.

Définition. *Un mot w sur l'alphabet {2, 3} vérifie <u>l'imparité rythmique</u> (au sens restreint aux durées 2 et 3) si aucune de ses permutations circulaires ne se factorise en deux mots de même somme, c'est-à-dire de la forme uv avec h(u) = h(v).*

Exemple : $w = 32322$

(32)(322)	$h(32)=5$, $h(322)=7$
(23)(223)	$h(23)=5$, $h(223)=7$
(32)(232)	$h(32)=5$, $h(232)=7$
(223)(23)	$h(223)=7$, $h(23)=5$
(232)(32)	etc.

Remarques : Si le poids total du mot est impair, on ne peut avoir deux facteurs de même poids, donc la définition est triviale. La définition n'a de sens que si le poids est pair, donc il faut **<u>un nombre pair de 3</u>**.

Propriété. *Les mots <u>rythmiquement impairs</u> sur {2, 3} ayant seulement <u>deux durées 3</u> sont nécessairement de la forme :*

$2^n32^{n-1}3$ (à une rotation près).

Dem. On montre qu'avec deux durées 3, la différence de longueur entre les facteurs de durées 2 qui les séparent doit être <u>exactement égale à 1</u>. Par l'absurde, supposons qu'elle soit différente de 1. On distingue selon qu'elle est paire $2k$, ou impaire non égale à 1 soit $2k + 3$ avec $k \geq 0$, et on trouve dans chaque cas une rotation équilibrée en passant 2^k à la fin :

• si la différence est paire $w = 2^n32^{n-2k}3$ -> rotation équilibrée $(2^{n-k}3)(2^{n-2k}32^k)$

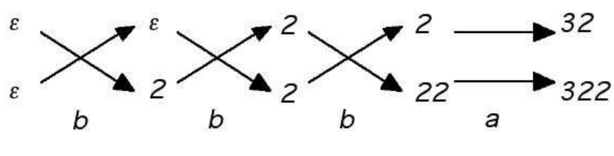
• si la différence est impaire $w = 2^n32^{n-2k-3}3$ -> rotation équilibrée $(2^32^{n-k-3})(32^{n-2k-3}32^k)$ car $h(2^3) = h(222) = h(33)$

Corollaire. *Avec deux durées 3, les mots rythmiquement impairs sont **<u>uniques</u>** pour une longueur (à une rotation près).*

2.4 Construction des rythmes vérifiant l'imparité rythmique

Soient deux transformations a et b de $\Sigma^* \times \Sigma^*$ dans $\Sigma^* \times \Sigma^*$ définies par :

$$a(u, v) = (3u, 3v), \qquad b(u, v) = (v, 2u).$$



Le rythme 32322 s'écrit (32)(322) avec (32, 322) = $abbb(\varepsilon, \varepsilon)$.

Théorème ([Chemillier & Truchet 2003]). *Un mot w vérifie l'imparité rythmique si et seulement s'il existe une transformation α obtenue en combinant a et b <u>avec un nombre impair de b</u> telle que $\alpha(\varepsilon, \varepsilon) = (u, v)$ avec w = uv ou vu.*

Soit $D = \{w$ tels que $w = uv$ avec $(u, v) = \alpha(\varepsilon,\varepsilon)$ et α ayant un nombre impair de $b\}$.

Proposition. *Pour w et w' dans D, on a :*

w et w' conjugués si et seulement si α et α' conjugués dans $\{a, b\}^*$.

Pour calculer un représentant par classe de conjugaison de mots w vérifiant l'imparité rythmique, il suffit de calculer les mots de Lyndon pour les mots α sur $\{a, b\}^*$.

On note n_2 et n_3 les nombres de 2 et de 3 dans un rythme vérifiant l'imparité rythmique :

Proposition. *Le nombre de solutions à l'imparité rythmique pour* $n_3 = 8$ *est la somme des carrés.*

Dem. Les solutions peuvent être associées à des suites α de a et b d'après le théorème précédent, avec quatre a et un nombre impair de b. Soit p la longueur de α. Énumérer les solutions consiste à énumérer les α possibles en plaçant 4 symboles a parmi p dans α, mais en enlevant les permutations circulaires.

Combien y a-t-il de permutations circulaires pour α ?

Supposons α non primitif : $\alpha = \gamma^n$, avec $n \geq 2$. Le nombre de a dans α est n fois le nombre de a dans γ. Mais 4 est divisible seulement par 2 et 4. Dans ces conditions, le nombre de b dans α ne peut pas être impair, ce qui est faux.

D'où α primitif, donc il a exactement p permutations circulaires.

Le nombre de solutions est

$$x = \frac{1}{p} C_p^4 = \frac{(p-3)(p-2)(p-1)}{4!}$$

Comme n_2 est impair, on peut écrire $n_2 = 2k - 1$, donc $p = n_2 + 4 = 2k + 3$, d'où :

$$x = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Il existe un lien très curieux entre l'asymétrie de ces rythmes et l'asymétrie de la gamme diatonique (touches noires du clavier séparées par 2, 3, 2, 2, 3 demi-tons), qui a été mis en évidence pour la première fois, semble-t-il, par Jeff Pressing en 1983.

De nombreux travaux ont étudié ces structures asymétriques en introduisant des concepts de combinatoire des mots.

2.5 Gammes maximalement réparties

Le concept de « gamme maximalement répartie » (*maximally even scale*) a été défini par Clough & Douthett 1991. Il est lié à d'autres concepts comme celui de « gamme bien formée » (*well-formed scale*) de Carey & Clampitt 1989 et conduit à introduire les séries de Fourrier. Godfried Toussaint, qui a collecté un grand nombre de rythmes sur tous les continents, a montré le lien de ces concepts avec les chaînes euclidiennes (Demaine *et al.* 2009). On définit ici la « répartition maximale » en termes de combinatoire des mots.

Σ = ensemble des entiers naturels **N** (alphabet infini)

gamme = mot w donnant les intervalles entre degrés consécutifs exprimés en nombre de « demi-tons » du total chromatique (pour la dernière note, on prend l'intervalle avec l'octave supérieur de la première note).

mots cumulés = obtenus en additionnant deux à deux, puis trois à trois, etc. les éléments consécutifs de w considéré circulairement, jusqu'à faire la somme de tous ses éléments.

-> donne les intervalles « diatoniques » de la gamme : « tierce », « quarte », etc. jusqu'à l'« octave »

Exemple : gamme diatonique (= touches blanches du piano)

```
(cumulate '(2 2 1 2 2 2 1))
k=1 (2 2 1 2 2 2 1)
k=2 (4 3 3 4 4 3 3)
k=3 (5 5 5 6 5 5 5)
k=4 (7 7 7 7 7 7 6)
k=5 (9 9 8 9 9 8 8)
k=6 (11 10 10 11 10 10 10)
k=7 (12 12 12 12 12 12 12)
```

Que remarque-t-on ?

-> à part l'octave (12), les intervalles diatoniques ont **toujours deux formes** : majeur / mineur, juste / augmenté, juste / diminué

Si w est de longueur d, les mots cumulés $w(x)$ sont aussi de longueur d et définis, pour $1 \leq x \leq d$ (en notant les indices circulairement) :

$w(x)_i = w_i + \ldots + w_{i+x-1}$.

Définition. *Une gamme est maximalement répartie si tous les mots cumulés w(x) contiennent au plus deux entiers différents et consécutifs.*

Remarque :

• Que se passe-t-il si le mot w ne contient qu'un seul entier (ex : gamme par tons) ?

-> Il en est de même de tous les mots cumulés $w(x)$.

Les modes correspondant à une division égale de l'octave sont des cas particuliers de gammes maximalement réparties. Par exemple, la « gamme par tons » correspond à w = 222222.

• On voit facilement que si pour $x < d$, le mot cumulé $w(x)$ est constant (ne contient qu'un seul entier), alors w est périodique (non primitif) de période x.

→ on a $w(x)_i = w(x)_{i+1}$, donc $w_i + (w_{i+1} + \ldots + w_{i+x-1}) = (w_{i+1} + \ldots + w_{i+x-1}) + w_{i+x}$, donc $w_i = w_{i+x}$

Est-ce que $w(x')$ est aussi constant pour $x' \geq x$?

→ pas nécessairement (voir exemples en Lisp dans OpenMusic)

```
(cumulate '(3 2 3 2 3 2))
k=1 (3 2 3 2 3 2)
k=2 (5 5 5 5 5 5)
k=3 (8 7 8 7 8 7)
k=4 (10 10 10 10 10 10)
k=5 (13 12 13 12 13 12)
k=6 (15 15 15 15 15 15)
```

• Si w ne contient que <u>deux entiers consécutifs</u>, alors les entiers apparaissant côte-à-côte dans les mots cumulés sont nécessairement des <u>entiers consécutifs</u>.

→ $|w(x)_i - w(x)_{i+1}| = |w_i - w_{i+x}| \leq 1$ si w ne contient que deux entiers consécutifs

Exemples de mots maximalement répartis :

- gamme diatonique (touches blanches)
- gamme pentatonique (touches noires)
- certains rythmes asymétriques d'Afrique centrale

Propriété. *Si w est un mot <u>maximalement réparti</u> sur $\{2, 3\}$ avec <u>un nombre pair de 3</u> et <u>un nombre impair de 2</u>, alors w est <u>rythmiquement impair</u>.*

Dem. Par l'absurde, supposons que w ne soit pas rythmiquement impair, donc on a une rotation de w se factorisant en uv tels que $h(u) = h(v)$ (notons que le poids de w est pair, car w a un nombre pair de 3). Comme w est de longueur impaire (car w a un nombre impair de 2), supposons $|u| < |v|$ (si c'est l'inverse on fait la rotation vu), c'est-à-dire $v = zx$ avec $|z| = |u|$ et $|x| \geq 1$, donc x comporte au moins un symbole égal à 2 ou 3, d'où $h(z) \leq h(v) - 2 = h(u) - 2$. Si $d = |u| = |z|$, le mot cumulé $w(d)$ contient $h(u)$ et $h(z)$ qui diffèrent d'au moins 2, donc <u>deux entiers qui ne sont pas consécutifs</u>, donc w n'est pas maximalement réparti.

La réciproque n'est pas vraie : certains rythmes vérifiant l'imparité rythmique ne sont pas maximalement répartis :

-> le rythme *mokongo* 333233232 n'est pas maximalement réparti

```
(cumulate '(3 3 3 2 3 3 2 3 2))
k=1 (3 3 3 2 3 3 2 3 2)
k=2 (6 6 5 5 6 5 5 5 5)
k=3 (9 8 8 8 8 8 7 8 8) NOT MAXIMALLY EVEN
k=4 (11 11 11 10 11 10 10 11 11)
k=5 (14 14 13 13 13 13 13 14 13)
k=6 (17 16 16 15 16 16 16 16 16) NOT MAXIMALLY EVEN
k=7 (19 19 18 18 19 19 18 19 19)
k=8 (22 21 21 21 22 21 21 22 21)
k=9 (24 24 24 24 24 24 24 24 24)
```

-> de même, le rythme 3332323332232 ne l'est pas

-> mais d'autres sont maximalement répartis : 3323323233232

Corollaire. *Si un mot w sur {2, 3} a* <u>*deux 3*</u> *et un* <u>*nombre impair de 2*</u>*, alors les conditions sont équivalentes :*

(i) w est maximalement réparti,

(ii) w est rythmiquement impair,

(iii) w est de la forme $2^n32^{n-1}3$ (à une rotation près).

Dem. (i) => (ii) => (ii) déjà vu.

(iii) => (i) Montrons que les mots de la forme $2^n32^{n-1}3$ sont maximalement répartis. Les facteurs de w de longueur $i \leq n$ contiennent soit aucun 3 (facteur 2^n), soit un seul 3, mais pas deux, donc leurs poids ne peuvent prendre que deux valeurs consécutives. Les facteurs de longueur $i \geq n + 1$ contiennent nécessairement un 3, ou éventuellement deux 3, mais pas plus, donc de la même manière, leurs poids ne peuvent prendre que deux valeurs consécutives.

Remarques :

• La condition sur les mots cumulés empêche les situations <u>**très déséquilibrées**</u> 11110000

-> elle oblige à une « répartition maximale »

• En revanche, elle n'empêche pas les situations <u>**très régulières**</u> 1111111, ou 10101010

-> dans ce cas, il existe une pulsation telle qu'on peut factoriser le mot en facteurs <u>qui commencent tous par 1</u>

(10)(10)(10)(10)

-> la condition sur les mots cumulés ne suffit pas à caractériser la <u>**contramétricité**</u>

Références

• <u>ouvrages et articles généraux</u>

Lothaire M., *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics, Vol. 17, Addison-Wesley, 1983 (réédité Cambridge University Press, 1997) (biblio).

Duval, Jean-Pierre, Génération d'une section des classes de conjugaison et arbre des mots de

Lyndon de longueur bornée, *Theoretical Computer Science*, 60 (3) (1988) 255-283.

• combinatoire des mots appliquée à la musique

Chemillier M., Periodic musical sequences and Lyndon words, *Soft Computing*, special issue on Formal Systems and Music, G. Assayag, V. Cafagna, M. Chemillier (eds.) **8** (9) (2004) 611-616 (biblio).

Chemillier M., Truchet C., Computation of words satisfying the "rhythmic oddity property" (after Simha Arom's work), *Information Processing Letters* **86** (5) (2003) 255-261 (biblio).

Chemillier M., Musique et rythme en Afrique centrale, *Pour la science*, dossier n° 47 « Mathématiques exotiques » (2005) 72-76, repris sur le site *CultureMATH* de l'ENS Ulm :

http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/chemillier05-09/math-musique-afriquecentrale.html

Chemillier M., *Les Mathématiques naturelles*, Paris, Odile Jacob, 2007.

Bouchet André, Imparité rythmique, *CultureMATH*, 2 octobre 2010 :

http://www.math.ens.fr/culturemath/maths/articles/Bouchet2010/imparite-rythmique.html

Clough John, Jack Douthett, Maximally even sets, *Journal of Music Theory*, 35 (1991) 93-173 (biblio).

Demaine, Erik D., Francisco Gomez-Martin, Henk Meijer, David Rappaport, Perouz Taslakian, Godfried T. Toussaint, Terry Winograd, David R. Wood, The distance geometry of music, *Computational Geometry: Theory and Applications*, 42 (2009) 429-454 (biblio).

N. Carey, D. Clampitt, Aspects of Well-Formed Scales, *Music Theory Spectrum* 11(2) (1989) 187–206 (biblio).

Pressing Jeff, Cognitive Isomorphisms Between Pitch and Rhythm in World Musics: West Africa, the Balkans and Western Tonality, *Studies in Music* (Australia) 17 (1983) 38–61 (biblio).