MMIM Modèles mathématiques

en informatique musicale

Marc Chemillier

Master M2 Atiam (Ircam), 2012-2013

Algorithme de Morris & Pratt

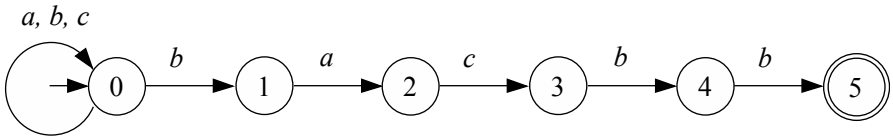
Oracle des facteurs (logiciels d'improvisation OMax, ImproteK)

- Construction de l'oracle
    - Liens suffixiels
    - Utilisation musicale de l'oracle

1. Algorithme de Morris & Pratt

1.1 Construction d'un AFN pour l'ensemble $\Sigma^* x$ des mots se terminant par x

Rappelons que l'écorché d'un mot x de longueur n est l'AFD de $n + 1$ états avec n flèches correspondant aux lettres successives du mot. Pour reconnaître $\Sigma^* x$, il suffit d'ajouter une boucle sur l'état initial avec toutes les lettres de l'alphabet. Exemple : $x = bacbb$



-> Pourquoi est-ce un AFN ?

il y a deux flèches avec *b* partant de l'état initial.

Application à la recherche d'un motif x dans un texte t :

• on déterminise l'AFN pour obtenir un AFD reconnaissant $\Sigma^* x$

• on lit le texte t dans cet automate. Que se passe-t-il si on arrive à l'état terminal ?

-> On a trouvé le motif x dans le texte t.

1.2 Utilisation d'une fonction d'échec

Algorithme de Morris & Pratt : calcul direct de l'AFD pour $\Sigma^* x$, **sans passer par la déterminisation de l'AFN**. On utilise une fonction d'échec définie sur les états p de l'écorché de x. Soit w le mot lu de l'état 0 à l'état p :

$f(p)$ = état d'arrivée du plus long suffixe propre de w qui est aussi préfixe de w (donc de x)

Exemple : Fonction d'échec pour l'écorché de $x = bacbb$:

État p	0	1	2	3	4	5
$f(p)$		0	0	0	1	1

• pour $p = 2$, le mot lu est *ba*, il n'a pas de suffixe propre qui soit préfixe, donc $f(2) = 0$

• pour $p = 4$, le mot lu est *bacb*, le plus long suffixe propre qui soit préfixe est *b*, donc $f(4) = 1$

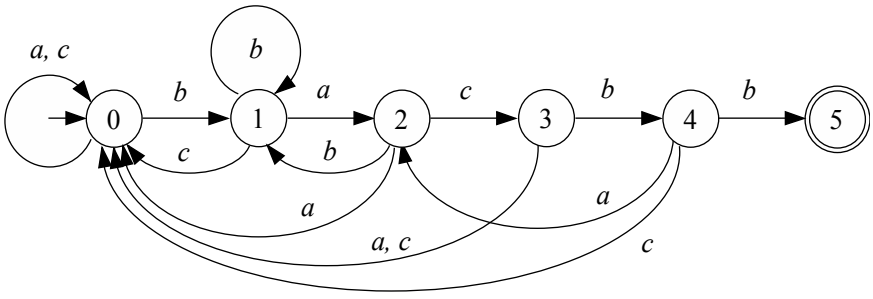
• pour $p = 5$, le mot lu est *bacbb*, le plus long suffixe propre qui soit préfixe est *b*, donc $f(5) = 1$

On ajoute de nouvelles transitions dans l'écorché de x de la manière suivante :

pour toute lettre a telle que $\delta(p, a)$ non défini, on pose

• $\delta(p, a) = \delta(f(p), a)$ si $p \neq 0$,

• $\delta(0, a) = 0$.



Exemple : Rechercher le motif $x = bacbb$ dans le texte $t = abacbacbba$

a b a c b a c b b a

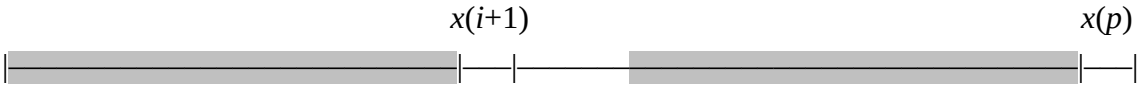
0 1 2 3 4 2 3 4 **5** motif trouvé !!!

1.3 Algorithme de calcul de la fonction d'échec

Pour calculer facilement $f(p)$, il faut voir si on peut le déduire de $f(p–1)$.
-> Il se trouve que ça marche.

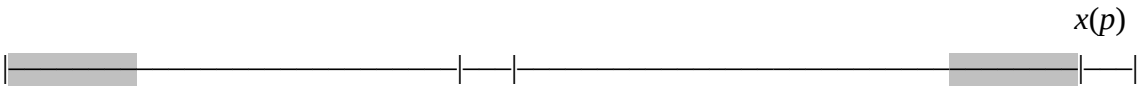
On note le motif $x = x(1)…x(n)$
On suppose construits $f(1)$, $f(2)…$ $f(p–1)$ et on cherche $f(p)$.

$i = f(p–1)$

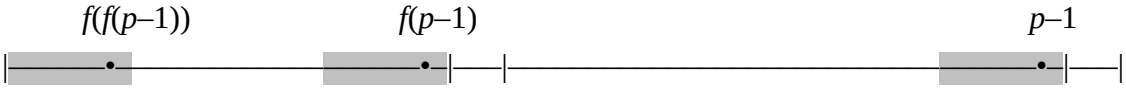


• si la lettre $x(i+1) = x(p)$
alors $x(1)…x(i+1)$ est à la fois préfixe et suffixe,
donc on peut prolonger le suffixe précédent : $f(p) = i + 1 = f(p–1) + 1$

• si la lettre est différente, il faut essayer un suffixe plus court, lequel ?
i = ?



=> ça doit être <u>un suffixe du suffixe précédent :</u>
donc <u>on réapplique *f*</u>



$i = f(f(p–1))$
et on recommence la comparaison entre $x(i+1)$ et $x(p)$

calcul de la fonction d'échec *f*

```
f(0) ← –1
i ← –1
pour p = 1 à n
        tant que i≥0 et x(i+1) ≠ x(p)
                i ← f(i)
        i ← i+1
        f(p) ← i
```

En fait, l'algorithme de Morris & Pratt ne construit pas explicitement l'AFD de $\Sigma^* x$. Il se contente de lire le texte *t* en avançant dans l'écorché de *x* (AFD), et en effectuant les retours arrière définis par la fonction d'échec.

L'algorithme naïf de détection de motif consiste à essayer de lire *x* dans le texte à partir de la 1ère lettre, puis de la 2ème, puis de la 3ème, etc. **en se décalant à chaque fois d'*une seule lettre***.

Dans l'algorithme de Morris & Pratt, si on a un échec de la lecture à la lettre en position *p* du motif, on se décale de $|x| - f(p)$ lettres. Cas optimal : le motif *x* ne comporte aucune répétition, c'est-à-dire $f(p) = 0$ pour tout *p*, donc **on se décale à chaque fois de *la longueur du motif***.

-> ça accélère considérablement le calcul

```
p ← 0 (état initial)
tant que t non vide
avancer dans t, a ← 1ère lettre de t
        tant que p  0et δ(p, a) non défini
                p ← f(p)
        si δ(p, a) défini alors p ← δ(p, a)
        si p ∈ F alors signaler occurrence de x dans t
```

2. Construction de l'oracle

2.1 Liens suffixiels

L'ensemble des facteurs d'un mot *x* est fini, donc reconnaissable par automate. On obtient facilement un AFN reconnaissant tous les facteurs en prenant l'écorché de *x* et en rendant tous les états initiaux et terminaux.

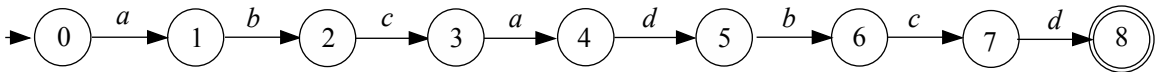
Problème : **il n'existe pas de construction simple de l'AFD correspondant** (contrairement à l'automate des mots se terminant par *x*).

L'« oracle des facteurs » a été introduit pour pallier cette difficulté.

L'*oracle des facteurs* est un automate qui reconnaît tous les facteurs d'un mot *x*, mais avec quelques mots en plus. Il est utilisé dans les applications de bio-informatique de façon **négative** : si un motif n'est pas reconnu par l'oracle d'une séquence ADN, on sait qu'il n'apparaît pas dans cette séquence.

On peut donner directement l'AFD correspondant (sans déterminisation) par une technique analogue à l'algorithme de Morris & Pratt.

Exemple : écorché de la séquence *x* = *abcadbcd*



Construction de l'oracle : on part de l'écorché de *x*, et on ajoute des transitions à l'aide d'une fonction *f* dite de « lien suffixiel » entre états, en construisant simultanément *f* et les transitions.

Au départ, on place un lien suffixiel de 1 vers 0. Puis on suppose l'oracle construit avec ses liens suffixiels jusqu'à l'état *p* compris. La lettre suivante *a* donne un nouvel état $\delta(p, a) = p+1$.

Pour ajouter les transitions, on suit les liens suffixiels déjà existants $p' = f(p)$, puis $p' = f(f(p))$, etc.

• si $\delta(p', a)$ est non défini, on ajoute une transition $\delta(p', a) = p+1$

- si $p' \neq 0$, on continue à suivre les liens,
- si $p' = 0$, on stoppe et on crée un lien suffixiel en posant $f(p+1) = 0$

• si $\delta(p', a)$ est défini, on stoppe (pas de nouvelle transition), et on crée un lien suffixiel en posant $f(p+1) = \delta(p', a)$ (= état d'arrivée de la transition existante)

Remarque : toutes les transitions arrivant dans un même état ont la même lettre.

Pour la séquence *abcadbcd*, l'oracle des suffixes donne l'AFD suivant (les liens suffixiels sont indiqués par des flèches en pointillé au-dessus).

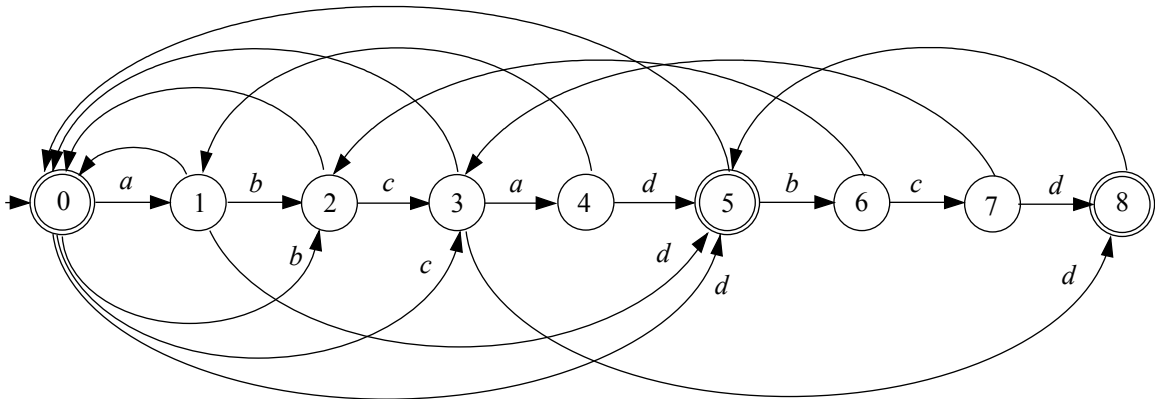
• Oracle des facteurs : tous les états sont terminaux

• Oracle des suffixes : les états terminaux sont ceux du chemin suffixiel partant du dernier état, soit 8 (suffixe *cd*), 5 (suffixe *d*), 0 (suffixe vide)

Les flèches du dessus ***sans étiquette*** sont les liens suffixiels.

Les flèches du dessous avec étiquette sont les transitions additionnelles (ajoutées à l'écorché).

Tant qu'on lit des lettres nouvelles (*a*, *b*, *c*, ...), les liens suffixiels vont vers 0. Quand il y a une répétition (par ex. *a*), les liens suffixiels vont vers des états plus grands.



2.2 Utilisation musicale de l'oracle

Dans le logiciel d'improvisation OMax, on parcourt l'oracle en suivant les transitions, mais aussi en empruntant éventuellement les liens suffixiels. Cela revient à étendre l'oracle en lui ajoutant des transitions vides :

d b c — 1er motif prélevé = *a b c a* ***d b c*** *d*

5 6 7

On emprunte le lien suffixiel de 7 à 3 pour reprendre la lecture vers 4 :

d b c a d b — 2e motif prélevé = *a b c* ***a d b*** *c d*

(3) 4 5 6

Le 1er motif *dbc* se terminait par *bc*. Or le 2ème motif *adb* est **précédé** par *bc* dans la séquence.

1er motif prélevé = *a b c a* ***d b c*** *d*

2ème motif prélevé = *a* (*b c*) ***a d b*** *c d*

Dans la succession des 2 motifs *dbc* + *adb*, le 2ème prélèvement devient (*bc*)*adb* :

d b c a d b — 2e motif **réellement** prélevé = *a* ***(b c)a d b*** *c d*

(2 3) 4 5 6

Ainsi les deux motifs réellement prélevés se **chevauchent** : *d*(*bc*) et (*bc*)*adb.*

C'est une propriété fondamentale de l'oracle :

Les dernières lettres lues avant de quitter un état par un lien suffixiel sont identiques à celles qui précèdent l'état d'arrivée du lien (ex : *bc* dans le parcours ci-dessus).

Ces lettres constituent une partie commune entre les motifs lus avant et après le lien suffixiel. Ainsi les liens suffixiels permettent d'enchaîner des motifs qui se chevauchent avec une partie commune (ex : *d*(*bc*) et (*bc*)*adb* dans le parcours ci-dessus).

Propriété fondamentale. *Si p est l'état d'arrivée d'un préfixe w de x, le lien suffixiel f(p) correspond à l'état d'arrivée du plus long suffixe de w qui est répété à gauche, c'est-à-dire qui est facteur non suffixe de w.*

Attention : Il ne faut pas confondre

• fonction de lien suffixiel :

f(*p*) = état d'arrivée du plus long suffixe propre de *w* qui est aussi **facteur** de *w* (donc de *x*)

• fonction de saut de Morris & Pratt :

f(*p*) = état d'arrivée du plus long suffixe propre de *w* qui est aussi **préfixe** de *w* (donc de *x*)

On peut améliorer le mode de navigation dans l'oracle (Assayag & Bloch 2007) :

avant de suivre un lien suffixiel, on regarde quelques états plus loin s'il n'y a pas un autre lien suffixiel **avec un suffixe propre répété plus long**

-> cela permet d'enchaîner des motifs avec des chevauchements plus grands

Références

• oracle des suffixes (simulation stylistique)

Allauzen, Cyril & Maxime Crochemore, Mathieu Raffinot, Factor oracle : A new structure for pattern matching, *SOFSEM '99*: *Proceedings of the 26th Conference on Current Trends in Theory and Practice of Informatics*, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 1999, p. 291-306 (biblio).

Assayag, Gérard, Shlomo Dubnov, Olivier Delerue, Guessing the Composer's Mind: Applying Universal Prediction to Musical Style, *Proceedings of the ICMC (Int. Computer Music Conf.)*, 1999, p. 496-499 (biblio).

Assayag, Gérard, Shlomo Dubnov, Using factor oracles for machine improvisation, *Soft Computing*, special issue on Formal Systems and Music, G. Assayag, V. Cafagna, M. Chemillier (eds.), 8 (9) (2004) 604–610 (biblio).

Assayag, Gérard, Georges Bloch, Navigating the oracle, *Proceedings of the ICMC (Int. Computer Music Conf.)*, 2007 (biblio).