CHAPITRE 2 : AUTOMATES FINIS DETERMINISTES (AFD)

1. Définition des automates finis déterministes (AFD)

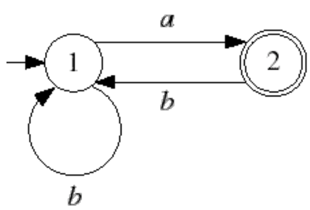
1.1 Définition générale

Définition. *Un automate fini déterministe AFD sur un alphabet* Σ *est la donnée d'un n-uplet* (Q, δ, i, F) *où* :

- Q *est un ensemble fini d'états*,
- δ *est une fonction de transition de* $Q \times \Sigma$ *dans* Q,
- i *est un état particulier de* Q *dit initial*,
- F *est une partie de* Q *d'états dits finals*.

L'automate est dit complet lorsque la fonction δ *est partout définie sur* $Q \times \Sigma$.

Exemple :



$Q = \{1, 2\}$,

$i = 1$, état noté avec une petite flèche entrante,

$F = \{2\}$, état noté avec deux cercles.

$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$

$(1, a) \rightarrow 2$

$(1, b) \rightarrow 1$

$(2, b) \rightarrow 1$

Cet automate n'est pas complet, car $\delta(2, a)$ n'est pas défini.

Pour décrire un automate, il est commode d'utiliser une table de transitions :

	1	2
a	2	
b	1	1

1.2 Prolongement de la fonction de transition

Le calcul de l'automate consiste à suivre des flèches, en partant d'un état initial et en s'arrêtant dans un état final. Le mot correspondant à ce calcul est la suite des étiquettes des flèches.

On prolonge δ par induction, en une fonction sur les mots de $Q \times \Sigma^* \to Q$:

$\delta(q, \varepsilon) = q$,

$\delta(q, wa) = \delta(\delta(q, w), a)$

pour tous $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$.

$\delta(q, w)$ = état atteint après lecture du mot w depuis l'état initial i.

Pour tous mots u, $v \in \Sigma^*$, on a : $\delta(q, uv) = \delta(\delta(q, u), v)$.

Exemple : dans l'automate ci-dessus

a correspond au calcul $1 \to 2$,

aba correspond au calcul $1 \to 2 \to 1 \to 2$.

En revanche, *abab* ne correspond pas à un calcul terminal de l'automate : $\delta(1, abab) = 1$ non terminal.

1.3 Langage reconnu par un AFD

Définition. *Le langage reconnu (ou accepté) par un automate AFD est l'ensemble des mots qui correspondent à un calcul de l'automate partant d'un état initial et s'arrêtant dans un état final.*

Exemple : le langage reconnu par l'automate ci-dessus est

$a(bb^*a)^*$

Les automates finis sont les modèles de machine les plus simples : ils n'ont aucun support de mémoire externe (comme la pile d'un automate à pile).

Leur mémoire est donc finie (espace constant), et correspond à leur nombre d'états. Par exemple, dans l'automate ci-dessus, l'état 1 permet de se souvenir qu'il faut lire un *a* pour sortir.

Exemples :

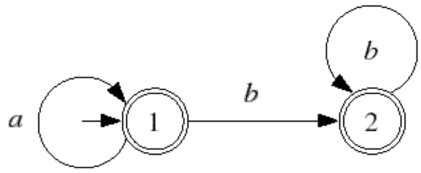
- distributeur de café : les pièces introduites sont les symboles de l'alphabet, l'état terminal est atteint quand le montant est supérieur au montant demandé,
- mécanisme contrôlant le code d'accès d'une porte : les chiffres tapés sont les symboles, l'état terminal est celui qui déclenche l'ouverture,
- rubiks cube : l'alphabet est l'ensemble des rotations des 6 faces.

2. Clôture par complément des langages reconnus par AFD

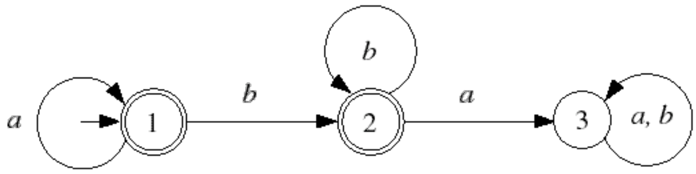
Propriété. *Si L est un langage reconnu par AFD, alors son complémentaire $\Sigma^*\backslash L$ l'est aussi.*

Exemple : $L = \{a^i b^j,\ i, j \in \mathbf{N}\}$,

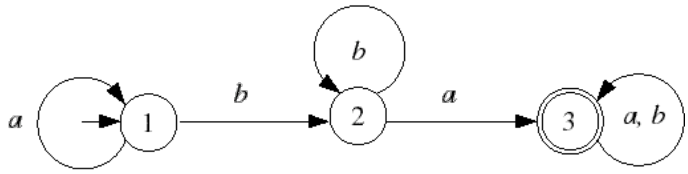
$\Sigma^*\backslash L = \{w \in \Sigma^*, ba$ est facteur de $w\}$



On complète l'automate :



Puis on intervertit les états finals :



Construction :

Si $A = (Q, \delta, i, F)$ est un AFD complet qui reconnaît L, alors

$A = (Q, \delta, i, Q\backslash F)$ reconnaît $\Sigma^*\backslash L$.