Chapitre premier

Mathématiques sans écriture ?

Les mathématiques occidentales se sont constituées en discipline autonone grâce à l'écriture, qui a permis l'élaboration de son corpus de résultats. Dans les sociétés de tradition orale, la situation est différente : on est conduit à s'interroger sur les formes que l'activité mathématique peut prendre lorsqu'elle dépasse le stade cognitif élémentaire. En premier lieu, l'usage des nombres (dans les échanges économiques par exemple) y fournit un champ privilégié d'étude de l'activité mathématique. Mais les mathématiques ne se réduisent pas aux manipulations numériques. Il existe d'autres domaines d'activité qui sont propices à la mise en évidence de préoccupations mathématiques : les arts visuels, les jeux, ou la musique par exemple.

Dans certaines sociétés, les arts plastiques témoignent de véritables recherches géométriques (symétries des figures ornementales), ou topologiques (enchevêtrements de tracés linéaires). Les jeux de stratégie, d'un autre côté, pratiqués dans toutes les régions du monde (échecs, go, awélé), offrent un terrain approprié à l'étude des diverses modalités du raisonnement déductif. Depuis quelques années, le contenu mathématique ou logique de ces activités a commencé à être étudié systématiquement.

Quelles sont donc ces mathématiques cachées dans les activités de ce type telles que arts graphiques, jeux de stratégie ou musique ? Cette question conduit à examiner plus en détails le problème général de la possibilité d'existence et de développement des mathématiques hors du contexte de l'écriture. Dans ce chapitre, nous allons aborder ce problème, en portant notre attention plus particulièrement sur la distinction fondamentale entre mathématiques analytiques et analogiques. Les mathématiques pratiquées dans les sociétés sans écritures sont de type analogique. Leur enracinement intuitif et sensoriel est plus fort que celui des mathématiques analytiques. Mais les mécanismes cognitifs en œuvre dans les sociétés de tradition orale ne sont pas si différents de ceux du monde occidental qu'on le pense à première vue.

Écriture, formalisme et intuition

Y a-t-il des mathématiques dans les sociétés de tradition orale ? Cela dépend bien entendu du sens que l'on donne au mot « mathématiques ». Avant de préciser la forme que peuvent prendre ces mathématiques, convenons d'emblée qu'elles s'intéressent à un ensemble de notions qui correspondent, dans la pensée occidentale, à des objets mathématiques usuels (nombres, espace, propositions logiques). Lorsqu'elles sont épurées par la formalisation mathématique, ces notions prennent un caractère purement abstrait. Elles n'en gardent pas moins un lien de parenté avec l'univers concret, parce qu'elles tirent leur origine d'intuitions issues de notre expérience du monde extérieur. Le marcheur, par exemple, expérimente dans ses muscles ce qu'est aller d'un point à un autre *le plus directement possible* : ainsi la notion de ligne droite est-elle enracinée dans l'intuition sensorielle.

Ce que nous, occidentaux, appelons « mathématiques » sont des mathématiques *analytiques*. Elles nécessitent l'usage de symboles, et ne sont pratiquées que dans les sociétés munies d'écriture. Mail il y a aussi des mathématiques non analytiques que Philip J. Davis et Reuben Hersh appellent *analogiques-expérimentales.*

> « Il est commode de diviser les mathématiques conscientes en deux catégories. La première, peut-être plus primitive, sera dite 'analogique-expérimentale' ou, en abrégé,

analogique. La seconde catégorie sera dite 'analytique'. La mathématisation analogique est parfois facile, elle peut être accomplie rapidement et elle peut ne faire aucun usage, ou très peu, des structures abstraites des mathématiques 'scolaires'. Elle peut être effectuée dans une certaine mesure par presque n'importe quel individu agissant dans un monde de relations spatiales et de technologie quotidienne. Tantôt elle est facile et presque sans efforts, tantôt elle est très difficile, par exemple lorsqu'on essaye de comprendre l'agencement des parties d'une machine, ou d'acquérir l'intuition d'un système complexe. Les résultats ne peuvent s'exprimer par des mots mais en 'compréhension', 'intuition' ou 'impression'. En mathématique analytique, l'outil symbolique prédomine. Elles constituent presque toujours une tâche difficile. Elles demandent du temps et de la fatigue. Elles nécessitent un entrainement particulier. Elles peuvent demander une vérification constante à l'aide de toute la culture mathématique pour assurer la fiabilité. Les mathématiques analytiques ne sont pratiquées que par très peu de gens. Les mathématiques analytiques sont élitistes ; elles s'autocritiquent. Les praticiens de ses plus hautes manifestations constituent une aristocratie. La plus grande vertu des mathématiques analytiques provient du fait que, tandis qu'il peut être impossible de vérifier les intuitions des autres, il est possible, quoique souvent difficile, de vérifier ses démonstrations[1]. »

Comme le soulignent Davis et Hersh, les mathématiques analogiques sont pratiquées par presque tout individu, en premier lieu dans ses relations spatiales avec le monde extérieur. Elles ne sont pas toujours élémentaires et correspondent parfois à des intuitions complexes. Surtout, elles ne sont pas étrangères à l'activité des mathématiciens spécialisés eux-mêmes. En effet, ceux-ci ne donnent une forme analytique à leurs exposés qu'au terme de recherches constituées, pour l'essentiel, d'études de cas particuliers, de tâtonnements sous forme de conjectures intermédiaires, et de contre-exemples. Au cours de ces recherches, la partie analogique-expérimentale est prépondérante. Il est difficile d'établir une différence de nature entre cette partie de leur activité et d'autres formes moins spécialisées d'activité cognitive déployées dans la vie quotidienne. En ce sens, on peut dire que, dans toute société humaine, on pratique, au moins d'une manière rudimentaire, les mathématiques.

Il nous semble que le théorème de Pythagore, qui date de 550 avant J.C. environ, fournit un bon exemple illustrant cette notion de « mathématiques analogiques ». On sait que dans un triangle rectangle de côtés a, b, c le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés $c^2 = a^2 + b^2$. Mais sait-on comment démontrer ce résultat ? Gilles Godefroy rappelle qu'il existe une technique permettant de le faire de façon purement visuelle :

> « Si nous analysons la démonstration, nous constatons qu'elle repose sur le simple fait que deux portions de plan exactement superposables ont même surface, fait qu'on applique ici à des carrés ou à des triangles rectangles isocèles. Cette assertion était à bon droit admise par les Grecs, comme en témoignent les *Éléments* d'Euclide. Elle permet d'ailleurs de donner une démonstration transparente du théorème de Pythagore dans le cas général. Cette démonstration, dans l'esprit du jeu chinois des formes appelé *tangram* et des pliages chers aux Orientaux dénommés *origramis*, est étroitement apparentée aux arguments de *Choupei Suan-ching*, un livre chinois où est présentée la démonstration d'un cas particulier du théorème de Pythagore, dans un chapitre sans doute antérieur de plusieurs siècles aux travaux des pythagoriciens. Il est

1. Philip J. Davis et Reuben Hersh, *L'Univers mathématique*, 1982, trad. Lucien Chambadal, Paris, Gauthier-Villars, 1985, p. 292.

donc vraisemblable que ce résultat central a été obtenu indépendamment par des chercheurs éloignés les uns des autres dans le temps et dans l'espace[2]. »

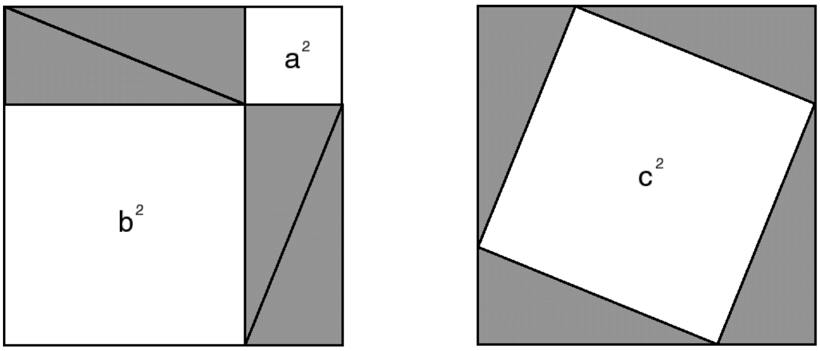

Figure 1.1. Un démonstration visuelle du théorème de Pythagore. En faisant glisser les triangles on montre que la surface du carré de droite c^2 est égale à la somme de celles des carrés de gauche $a^2 + b^2$.

L'image de la figure 1.1 donne une vision synthétique de la preuve : les quatre triangles occupent la même surface dans les deux dispositions, ce qui implique que la surface complémentaire reste la même dans les deux cas, grand carré d'un côté c^2 et petits carrés de l'autre $a^2 + b^2$. On peut même ajouter que cette démonstration est explicitée par un *geste*, celui de « faire glisser les triangles » selon la jolie expression de Gilles Godefroy, comme s'il s'agissait des pièces en bois d'un puzzle. On verra en de nombreux endroits de ce livre comment le geste est un véhicule puissant de la pensée. Nul besoin de l'écriture dans un tel contexte, la figure et le geste suffisent.

L'écriture et la formalisation jouent un rôle fondamental en mathématiques comme outils permettant de secourir l'intuition lorsque celle-ci est confrontée à des paradoxes. L'un des paradoxes classiques de l'Antiquité, celui de Zénon d'Élée (v. 495-430 av. J.C.), affirme qu'Achille ne peut jamais rattraper la tortue, parce qu'il doit toujours atteindre d'abord le point où elle se trouvait précédemment et qu'elle a donc quitté entretemps, de telle sorte que l'animal garde indéfiniment une longueur d'avance. Pourtant, à considérer posément le problème, on voit bien que si la vitesse d'Achille est supérieure à celle de la tortue, la distance qu'il parcourt augmente plus vite que celle parcourue par la tortue, si bien qu'il existe nécessairement un point où leurs trajectoires se rencontrent. Plus précisément, si v et v' sont les vitesses d'Achille et de la tortue, et d la distance les séparant au départ, leurs positions au temps t sont respectivement vt et $v't + d$, de telle sorte que l'on a $vt = v't + d$ à l'instant $t = d / (v - v')$ où ces deux positions se rejoignent.

Alors comment concilier ces deux points de vue, le fait que la tortue garde indéfiniment une longueur d'avance d'un côté, et le fait que sa trajectoire rencontre celle d'Achille de l'autre ? Le paradoxe est caché dans le terme « indéfiniment », qui paraît clair dans une approche naïve, mais qui doit nécessairement être précisé si l'on veut échapper à la contradiction. En réalité, dans une approche mathématique, on dira que la suite décroissante des distances séparant Achille de la tortue est une suite convergente, dont la limite est nulle. C'est cette notion de limite d'une suite convergente qui permet de lever le paradoxe. Mais que de chemin nécessaire pour y arriver (« suite convergente », « limite », …) ! Le paradoxe de Zénon est un exemple de situation où la formalisation est le seul moyen de rendre cohérentes entre elles deux descriptions incompatibles d'un même phénomène. D'un côté, on a une suite *infinie* de points successifs, de l'autre une distance *finie* séparant le point de départ du point de

2 Gilles Godefroy, *L'Aventure des nombres*, Paris, Odile Jacob, 1997, p. 34.

rencontre. Le concept mathématique de « suite infinie convergente » permet précisément de concilier ces deux aspects de finitude et d'infinitude.

Même en dehors de la situation embarrassante des paradoxes, l'écriture joue un rôle essentiel dans l'établissement de preuves des propriétés que l'on affirme à propos de divers objets mathématiques. Cette notion de « preuve » (ou de démonstration), dont Gilles Godefroy faisait remarquer qu'elle remontait aux Anciens, et qu'aux dires de certains, elle serait peut-être amenée un jour à disparaître[3], a pour fonction capitale de montrer que des énoncés considérés comme vraisemblables, sont vrais, sous réserve qu'on accepte le cadre d'une axiomatique donnée. L'enjeu est important, parce que les mathématiques sont pleines de ces suspens interminables, qui se prolongent parfois pendant des siècles, au terme desquels un résultat s'avère finalement vrai, ou parfois faux.

L'exemple emblématique de ce genre de suspens, qui a finalement trouvé une issue heureuse, est le fameux théorème de Fermat (1601-1665). Celui-ci affirme que l'équation

$$x^n + y^n = z^n$$

n'a pas de solutions entières non nulles pour n supérieur ou égal à trois (pour $n = 2$, on a bien entendu la solution $3^2 + 4^2 = 5^2$). On sait que Fermat a griffonné en marge d'un livre qu'il avait trouvé une démonstration de cet énoncé, mais qu'il n'avait pas assez de place pour l'écrire. Pendant plus de trois siècles, les mathématiciens ont essayé de reconstituer ce qui pouvait être une preuve de ce résultat. La propriété était tenue pour vraisemblable, mais elle n'était toujours pas démontrée. Au début des années 1990 (donc plusieurs années avant que le théorème ne soit finalement établi), un mathématicien de l'université de Caen, Yves Hellegouarch, me disait qu'il était *convaincu* que le théorème de Fermat était vrai. En 1995, l'histoire lui a donné raison, lorsqu'Andrew Wiles en a finalement donné une preuve complète.

Mais d'autres conjectures célèbres, qui ont tenu en haleine les mathématiciens, se sont avérées fausses. Gilles Godefroy cite l'exemple d'une majoration, conjecturée par Gauss (1777-1855), du nombre d'entiers premiers inférieurs à n. La répartition des nombres premiers est un phénomène mathématique fascinant, qui semble échapper à toute régularité. Pour essayer de percer ses mystères, on s'efforce de trouver des approximations de la fonction $\pi(n)$ qui est égale au nombre d'entiers premiers plus petits que n. Par exemple, il y a quatre entiers premiers inférieurs à dix (deux, trois, cinq et sept), donc $\pi(10) = 4$. Comment évolue $\pi(n)$ quand n prend des valeurs de plus en plus grandes ? Gauss avait conjecturé que ce nombre $\pi(n)$ était toujours plus petit que l'intégrale de l'inverse du logarithme entre 0 et n. Il a fallu attendre 1914 pour que John E. Littlewood (1885-1977) démontre que cette conjecture est fausse[4]. Mais le plus petit nombre pour lequel on sait aujourd'hui qu'elle est fausse est un nombre considérable, de l'ordre de 10^{370}. On voit que cette propriété pouvait raisonnablement être tenue pour vraisemblable, même si elle n'était pas vraie *stricto sensu*, au sens d'une preuve mathématique.

Il faut préciser que lorsqu'on dit qu'une propriété mathématique est « démontrée », c'est toujours relativement à une axiomatique donnée. Sa vérité n'est jamais absolue, mais toujours relative à un cadre fixé d'avance. Ce cadre est bien entendu choisi pour rendre compte de l'intuition de façon adéquate, c'est-à-dire pour que l'axiomatique permette de prouver des résultats qui correspondent à ceux que l'intuition suggère (exceptés, bien sûr, les situations de paradoxe, dont la particularité est de mettre l'intuition en difficulté). Mais l'axiomatisation ne rend jamais compte de l'intuition de façon absolument parfaite.

3. *Id.*, *ibid.*, p. 183.
4. *Id.*, *ibid.*, p. 184.

Un exemple caractéristique de ces limites est celui de l'axiome de Pasch[5]. En 1882, soit plus de deux mille ans après qu'Euclide (v. 325-265 av. J.C.) eut énoncé ses axiomes de la géométrie, le mathématicien allemand Moritz Pasch (1843-1930) s'est aperçu de leur incapacité à rendre compte de certaines intuitions élémentaires, et de la nécessité, pour rendre valide la démonstration de théorèmes importants de la géométrie, d'ajouter un nouvel axiome. Celui-ci correspond à une intuition pourtant très simple. Si une droite coupe un côté d'un triangle, elle coupe nécessairement l'un des deux autres côtés, c'est-à-dire que si elle « rentre » dans le triangle, elle doit en « ressortir » quelque part. Il n'y a pas besoin de faire une figure pour être convaincu que cette proposition est vraie. Mais les axiomes d'Euclide ne permettaient pas de rendre compte d'intuitions comme celle-là.

Une autre limite des mathématiques formalisées réside dans la formalisation elle-même, c'est-à-dire dans la manière dont on déduit des propositions à partir d'un axiomatique donnée. L'usage d'un symbolisme spécifique et de conventions d'écriture rigoureuses permet en principe de s'assurer que les déductions sont exemptes de fautes de raisonnement. Mais cet objectif n'est jamais atteint de façon infaillible. Même un résulat tenu pour irréfutable, parce qu'il a été démontré dans les règles de l'art, n'est vrai que dans la mesure où sa démonstration ne comporte pas d'erreur. Or il n'existe pas de procédure permettant de contrôler de façon certaine l'absence d'erreur dans une démonstration. On peut seulement affirmer qu'on est « convaincu » qu'une démonstration n'en comporte pas, de telle sorte que, même un résultat tenu pour vrai, n'est en réalité que « vraisemblable » dans la mesure où il repose sur la conviction que l'on a que sa démonstration est correcte.

Ce constat a été aggravé par l'introduction, il y a quelques décennies, de l'ordinateur dans des démonstrations par étude exhaustive de cas, qui nécessitent l'inventaire de milliers de configurations. C'est le cas du théorème des quatre couleurs démontré par Kenneth Appel et Wolfgang Haken en 1976. Ce théorème affirme que toute carte géographique peut être coloriée avec seulement quatre couleurs, de manière que deux pays voisins ne soient jamais de la même couleur. La propriété ainsi énoncée n'est vraie que si l'on accepte de considérer que l'ordinateur chargé d'inventorier les innombrables configurations nécessaires pour sa démonstration a bien calculé. Or vérifier ce point n'est pas la même chose que vérifier une démonstration mathématique au sens habituel. On voit que ce genre de situations nouvelles change de façon déterminante la conception même que nous nous faisons de ce qu'est un résultat « vrai » dans les mathématiques formalisées. En fin de compte, les relations entre l'intuition et l'écriture, qui fondent la distinction entre mathématiques analytiques et mathématiques analogiques, ne constituent pas un modèle idéal et éternellement stable, mais un champ d'expérimentations riche et complexe.

Les représentations d'un point de vue psychologique

Une distinction semblable à celle qui oppose mathématiques analogiques et analytiques est en usage chez les psychologues. Ceux-ci utilisent la notion de représentation, qui met en jeu un représentant et un représenté associés dans certaines conduites. Considérons un objet simple comme un panier, et prenons une photographie de cet objet. La photographie joue le rôle de représentant si, par exemple, on me la confie en me demandant d'aller dans un placard qui contient plusieurs paniers pour chercher celui qui correspond au cliché. Ma conduite sera alors guidée par une représentation associant panier-représenté et photographie-représentant, où le substitut représentant me permet de contrôler mon action pour trouver l'objet représenté. Le représentant a ici une existence autonome en tant qu'objet réel, puisqu'il s'agit d'une photographie, mais le même scénario peut être imaginé avec un représentant

5. Philip J. Davis et Reuben Hersh, *op. cit.*, p. 152.

mental, par exemple si je devais aller chercher le panier après avoir vu la photographie, mais sans l'emporter avec moi, en me fiant seulement à ma mémoire. Ma conduite serait alors déterminée par un représentant purement mental, une image mentale du panier.

La notion de représentation utilisée en anthropologie diffère sensiblement de celle illustrée par l'exemple précédent, dans la mesure où les représentations étudiées, appelées *représentations culturelles*, sont moins celles d'un individu que celles d'un groupe[6]. Ces représentations se manifestent dans des conduites sociales, comme celles qui caractérisent, par exemple, l'attitude à l'égard des parents. Mais les représentations qui nous intéressent sont des représentations culturelles un peu particulières, elles ne sont pas nécessairement partagées par toute une société. Prenons le cas de la musique. La compréhension des formes musicales et la capacité de réfléchir sur ces formes ne concernent pas tous les individus, mais seulement certains esprits ayant des aptitudes spécifiques. C'est pourquoi il est nécessaire de distinguer, parmi les individus d'une société, ceux qui jouent la musique, ceux qui la créent (c'est-à-dire qui inventent de nouvelles formes) et ceux qui sont capables d'en parler, ces trois catégories d'individus mettant en œuvre des facultés cognitives différentes. Cette distinction est d'ailleurs universelle et vaut pour la société occidentale, où l'interprète, le compositeur et le théoricien de la musique sont rarement une seule et même personne.

Peut-on parler de représentations mathématiques dans un contexte de tradition orale ? On a rappelé plus haut que l'écriture est un outil essentiel utilisé par les mathématiciens pour mettre en forme leurs intuitions à travers des *démonstrations écrites* soumises à une syntaxe rigoureuse. Celle-ci joue le rôle de filtre permettant d'éliminer les intuitions fausses. Mais il est non moins vrai que la partie écrite des mathématiques ne représente qu'un aspect de l'activité des mathématiciens. Les psychologues font une différence intéressante entre représentations analogiques et non analogiques, qui permet de distinguer deux niveaux de l'activité mathématique, et d'étendre la notion de représentation mathématique hors du contexte de l'écriture.

On appelle *représentations analogiques* celles qui reposent sur une ressemblance entre les termes représentant et représenté. Si l'on reprend l'exemple du panier, une photographie ou un croquis sera considéré comme une représentation analogique. Mais il faut souligner que la relation représentant-représenté s'étend à des formes beaucoup plus diversifiées que la simple relation d'analogie entre un objet et sa photographie. Par exemple, on peut représenter le panier par une description, c'est-à-dire un ensemble de mots écrits sur une feuille de papier, qui n'a aucune ressemblance matérielle avec l'objet, mais qui affirme à son sujet certaines propriétés. Il s'agira alors d'une *représentation non analogique*[7]. Les textes des mathématiques occidentales en sont un exemple typique. Mais les psychologues soulignent l'existence d'un autre niveau de l'activité mathématique où les représentations analogiques ont une place essentielle. À ce niveau, elles jouent un rôle dans l'intuition des mathématiciens, qui consiste, dans de nombreux cas, à imaginer des conjectures à partir de manipulations effectuées sur ces représentations. Ainsi, lorsque nous parlons de représentations mathématiques dans un contexte de tradition orale, il s'agit de représentations analogiques, proches de celles qui interviennent dans cette partie intuitive de l'activité mathématique.

Certaines représentations peuvent fonctionner dans des systèmes de conduites très différents les uns des autres, et apparaissent comme « détachables » de ces conduites[8]. Dans ce cas, elles sont verbalisables : on en trouve un exemple type dans les concepts scientifiques. D'autres, en revanche, ne fonctionnent qu'à l'intérieur d'un système de conduites bien déterminé, et ne peuvent avoir une indépendance totale à l'égard de ce système. Ce sont des

6. Dan Sperber, *La Contagion des idées*, Paris, Odile Jacob, 1996, p. 50.
7. *Id., ibid.*, p. 51.
8. François Bresson, « Les fonctions de représentation et de communication », in J. Piaget, P. Mounoud, J.P. Bronckart (éd.), *Psychologie*, Paris, Encyclopédie de la Pléïade, 1987, p. 948.

programmes comportementaux intégrés dont on peut observer les résultats à travers des conduites, mais qui ne sont pas directement accessibles à la conscience. Celles-là *ne sont pas verbalisables*, et si l'on peut éventuellement en parler, on ne peut pas les transmettre intégralement sous forme verbale. La grammaire d'une langue est un exemple de représentation intégrée de ce type. Elle constitue un savoir partagé par les locuteurs de cette langue, mais sans que ceux-ci puissent expliciter complètement l'ensemble complexe des règles qui régissent son fonctionnement. Un autre exemple de représentations de ce type, qui présente des similitudes avec le thème des dessins sur le sable abordé plus loin, c'est celui du nouage ou de la dentelle. Le produit de l'activité contrôlée par ces représentations peut faire l'objet d'un discours (on peut décrire un napperon), mais l'activité elle-même n'est pas transmissible par le seul langage : on ne peut l'enseigner au téléphone[9].

Enquête de terrain et savoirs de tradition orale

Les savoirs de tradition orale ne sont pas toujours verbalisés. C'est particulièrement le cas en ce qui concerne les savoirs musicaux. Pour les ethnomusicologues, l'une des principales difficultés vient de ce que les représentations mentales associées à la musique sont rarement l'objet d'un discours. Comme l'a souligné Rouget à propos des musiques de cour de Porto-Novo, les conduites musicales sont le plus souvent régies par des règles implicites, ce qui conduit à distinguer deux niveaux du savoir musical, le niveau manifeste et le niveau latent :

> « Par 'niveau manifeste', entendons celui où se situe le savoir explicite — c'est-à-dire s'exprimant par des mots — dont cette musique est l'objet pour ceux ou celles qui la font. Concrètement : la terminologie autochtone concernant les instruments de musique, la musique et la danse, d'une part ; de l'autre, l'expression des idées ou des représentations collectives, autochtones toujours, s'y rapportant dans les différents domaines de la symbolique, de la fonction et de l'histoire. Ajoutons, bien entendu, les paroles des chants et les formules mnémotechniques des rythmes[10]. »

Pour illustrer ce « niveau manifeste » du savoir, citons le cas du répertoire musical qui sera présenté au chapitre V, dont les pièces sont classées selon une nomenclature autochtone en *ngbàkià, limanza*, *gitangi*, ces termes désignant également les danses qu'elles accompagnent. À un autre niveau se situent ce que Rouget appelle les savoirs implicites :

> « Par 'niveau latent' entendons celui où se situent les savoirs implicites — autrement dit : ne disposant d'aucun vocabulaire autochtone pour s'exprimer — qui régissent l'organisation de cette musique[11]. »

Comme exemple de « niveau latent », on peut mentionner les caractéristiques rythmiques des danses citées plus haut, car comme on le verra, la nomenclature autochtone de classification des pièces coïncide avec une distinction sur le plan musical en rythmes binaire (*ngbàkià*) et ternaire (*limanza*), bien qu'aucun terme vernaculaire ne corresponde à ces notions de « binaire » et « ternaire ». Les deux niveaux du savoir ainsi définis, manifeste et latent, renvoient approximativement à ce que les psychologues décrivent comme les deux types possibles de relations entre conduites et représentations.

9. *Id., ibid.*, p. 964.
10. Gilbert Rouget, *Un roi africain et sa musique de cour*, Paris, CNRS Editions, 1996, p. 13.
11 *Id., ibid.*

Certaines notions mathématiques, comme les nombres, ne font pas nécessairement l'objet d'une verbalisation. On sait qu'il existe certaines langues ne comportant aucun terme pour désigner les nombres autres que « un », « deux » et « beaucoup ». Mais les locuteurs de ces langues peuvent compter, même s'ils ne disposent pas de termes spécifiques associés aux nombres. Il suffit pour cela qu'ils réalisent un appariement entre les objets à compter et une série d'objets de référence, par exemple les doigts de la main :

> « Ce concept d'appariement nous rend accessible la notion abstraite de nombre : dès lors que cinq bisons ou cinq jours de marche sont mis en correspondance avec les cinq doigts d'une main, on peut nommer cinq, par exemple, du mot qui signifie *main*, et parvenir à l'idée que '*main*' s'emploie identiquement pour compter des objets, des jours ou des sons, puis de là au concept du nombre '*main*'[12]. »

Ainsi, la notion de nombre dans sa forme archaïque paraît plus proche du geste consistant à apparier des objets, que de la verbalisation consistant à nommer les quantités. Ajoutons, pour compléter cette remarque, que les études en neuroimagerie cognitive révèlent, lors des activités numériques comme le comptage, l'activation, dans le gyrus précentral du cerveau, de la bande prémotrice proche de la zone activée pour la représentation des doigts. Ce lien pourrait être une trace développementale du comptage et de la manipulation des quantités sur les doigts lors de l'acquisition par l'enfant des capacités numériques[13].

Les représentations non verbalisables sont difficiles à cerner par l'enquête ethnographique, comme le souligne Maurice Bloch :

> « Il ne faut pas confondre ce que les gens disent et ce qu'ils pensent. Il y a différentes catégories de savoir et chacune d'elles entretient une relation différente avec le langage et l'action. Normalement, on ne parle jamais du savoir le plus fondamental, et en parler c'est en transformer la nature : c'est le fait même que l'on ne puisse en parler qui nous permet de l'utiliser avec rapidité et souplesse. Ce savoir est tout simplement implicite, et c'est grand dommage parce que c'est précisément ce type de savoir qui devrait constituer l'objet privilégié des recherches anthropologiques[14]. »

Il donne un exemple tiré de son travail sur la parenté qui met en lumière ce que peut être un concept non verbalisé. Les Zafimaniry de Madagascar ont une terminologie de parenté assez vague. Or il se trouve que leur système d'alliance fonctionne sur un modèle précis à deux moitiés exogames, échangeant des conjoints de manière régulière et systématique. Ainsi, les Zafimaniry utilisent le concept de « groupe d'alliés parmi lesquels nous chercherons normalement nos époux », alors qu'ils n'ont aucun mot pour le désigner. Bloch montre que ce concept apparaît très tôt chez l'enfant, qui est habitué à téter le sein d'autres femmes que sa mère, mais appartenant à la même moitié de village, et qui pleure si on lui donne le sein d'une femme appartenant à l'autre moitié.

Dans le cas contraire, lorsqu'un concept est verbalisé, il peut rester une part d'ambiguïté s'il est lié à des représentations pouvant prendre plusieurs formes différentes. Bernard Lortat-Jacob en donne un exemple emblématique concernant la musique, à propos de la *quintina*, cette voix fusionnelle apparaissant dans le spectre harmonique des quatre voix

---

12. Gilles Godefroy, *op. cit.*, p. 3.
13. Olivier Houdé, Mazoyer, B., Tzourio-Mazoyer, N., *Cerveau et psychologie. Introduction à l'imagerie cérébrale anatomique et fonctionnelle*, Paris, PUF, 2002, p. 369, 546.
14. Maurice Bloch, « Le cognitif et l'ethnographique », *Gradhiva* 17, 1995, p. 45-54.

chantées par un choeur sarde. L'existence d'une représentation mentale associée à cette voix ne fait aucun doute, puisqu'il existe un terme pour la désigner. Mais il reste à savoir à quelle hauteur du spectre harmonique les Sardes se la représentent mentalement. L'analyse acoustique du phénomène conduit à hésiter entre deux zones, celle se situant à la double ou triple octave de la basse (par exemple, *sol* à environ 400 ou 800 Hz si la basse chante un *sol* à environ 100 Hz[15]), ou celle se situant à la quinte trois fois redoublée (*ré* à environ 1200 Hz dans la même situation). Il se trouve qu'on peut lever l'ambiguïté dans ce cas particulier, car les chanteurs sardes *sifflent* la hauteur qu'ils se représentent, et qui s'avère être la double ou triple octave de la basse :

> « Or, même si [le] *ré* est bien présent dans le spectre harmonique et qu'une oreille attentive peut le percevoir, il semble qu'il ne soit pas prépondérant. Pour la majorité des auditeurs, comme pour les confrères eux-mêmes, qui peuvent la chanter, et, plus commodément la siffler, la *quintina* semble plutôt reproduire la fondamentale de l'accord et se trouver à sa double (ou triple) octave, soit *sol* dans l'aigu[16]. »

Ce cas résume bien notre problématique, en éclairant certaines limites de l'analyse objective. On verra au chapitre V une situation musicale dans laquelle on est conduit également à deux interprétations logiquement équivalentes, mais sans qu'il soit possible de décider si l'une d'elles correspond aux représentations mentales des musiciens autochtones.

Mentionnons pour finir une sorte d'expérience de « vérification sur le terrain » que nous avons menée à propos de la *quintina* des chanteurs sardes. Il existe un logiciel développé à l'Ircam qui permet d'isoler les partiels d'un spectre acoustique. Grâce à lui, nous avons traité un enregistrement de polyphonie vocale de Sardaigne réalisé par Bernard Lortat-Jacob, en isolant la *quintina* à la hauteur où elle est censée être représentée mentalement dans l'esprit des chanteurs. Puis, au cours d'un repas pris avec eux à Castelsardo en Sardaigne, nous leur avons fait entendre le résultat sur un ordinateur portable. Cette scène conviviale a permis aux chanteurs de faire toutes sortes de commentaires, en mélant les registres scientifique et amical, pour donner leur avis sur l'expérience insolite que nous leur proposions, chacun d'eux se penchant sur l'ordinateur pour mieux entendre cette voix surnaturelle de la *quintina* que nous avions matérialisée, en quelque sorte, à partir de l'enregistrement de leur chant. Cet exemple montre comment l'enquête de terrain peut s'articuler avec la modélisation. Le phénomène étudié ici fait apparaître une voix fusionnelle dont la théorie acoustique permet de modéliser la hauteur supposée, et que la technologie informatique fait entendre de façon isolée. La confrontation sur le terrain avec les chanteurs concernés, qui écoutent cette « voix » reconstituée et la commentent, permet de vérifier l'adéquation du modèle avec les représentations mentales autochtones.

15. Le *sol* de la gamme tempérée est à 98 Hz.
16. Bernard Lortat-Jacob, *Chants de passion. Au cœur d'une confrérie de Sardaigne*, Paris, Cerf, 1998, p. 144.