

**MMIM Modèles mathématiques
pour l'informatique musicale**
Marc Chemillier
Master 2 Atiam (Ircam), 2013-2014

Notions théoriques en combinatoire des mots

- Conjugaison et mots de Lyndon
 - o Conjugaison
 - o Mots de Lyndon
- Combinatoire des mots appliquée à la musique
 - o Imparité rythmique et contramétrie
 - o Construction des mots vérifiant l'imparité rythmique
 - o Lien avec les automates et les transductions

1. Conjugaison et mots de Lyndon

1.1 Conjugaison

On introduit une permutation δ de Σ^* en posant :

$$\delta(au) = ua \text{ pour } u \in \Sigma^*, a \in \Sigma,$$

$$\delta(\epsilon) = \epsilon.$$

Cela revient à faire passer la première lettre à la fin du mot.

La *classe de conjugaison* de u est l'orbite de u sous l'action de δ . C'est l'ensemble des permutations circulaires de u (ou rotations de u).

Exemple : pour le mot $abaa$

$$\delta(abaa) = baaa$$

$$\delta^2(abaa) = aaab$$

$$\delta^3(abaa) = aaba$$

$$\delta^4(abaa) = abaa$$

- le nombre de permutations circulaires d'un mot est-il toujours égal à sa longueur ?
→ non, $abab$ n'a que 2 permutations circulaires : $\delta(abab) = baba$, $\delta^2(abab) = abab$

Notons qu'on a toujours $\delta^{|u|}(u) = u$ où $|u|$ est la longueur de u .

Rappelons qu'un mot est primitif s'il n'est pas puissance d'un mot plus court.

Proposition 1. *Pour tout mot u , il existe un mot primitif x et un entier d non nul tels que $u = x^d$. La longueur p de x est la période de u .*

Remarque : pour un mot u primitif, on a $p = |u|$ et $d = 1$

Corollaire 2. *Le nombre de permutations circulaires distinctes d'un mot u est égal à sa période p . Les entiers k tels que $\delta^k(u) = u$ sont les multiples de p , et en particulier $|u|$ est multiple de p .*

Exemples :

- $u = abab = x^2$ avec $x = ab$, nombre de permutations circulaires distinctes $p = 2$
- $u = aabaab = x^3$ avec $x = abb$, nombre de permutations circulaires distinctes $p = 3$
- $u = aaaaaa = x^5$ avec $x = a$, nombre de permutations circulaires distinctes $p = 1$

Proposition 3 ([Lothaire 1983, p. 7, proposition 1.3.2]). *Si deux mots u et v commutent $uv = vu$, alors ils sont puissances d'un même mot $u, v \in x^*$.*

Dem. Si u et v commutent, on a $\delta^{|u|}(uv) = vu = uv$. Soit x le mot primitif de longueur p défini par la proposition 1 tels que $uv = x^d$. Le corollaire 2 indique que les entiers k tels que $\delta^k(uv) = uv$ sont les multiples de p , donc $|u|$ est multiple de p ce qui donne $u = x^{|u|/p}$. De même $|v| = |uv| - |u|$ est multiple de p donc $v = x^{|v|/p}$.

Démonstration de la proposition 1 et du corollaire 2. Ce sont des propriétés de théorie des groupes. L'application $i \rightarrow \delta^i$ est un morphisme du groupe des entiers relatifs $\mathbf{Z}$ dans le groupe des puissances de δ . Si l'alphabet Σ est réduit à une seule lettre, tous les mots sont des puissances de cette lettre, $\delta = \text{Id}$, la période des mots est toujours 1 et il n'y a qu'un seul mot primitif réduit à la lettre unique. Sinon, le morphisme est injectif car s'il y a plus de deux lettres, on a $\delta^i \neq \text{Id}$ pour $i > 0$.

L'ensemble des puissances δ^k telles que $\delta^k(u) = u$ est un sous-groupe (= fixateur de u) du groupe des puissances de δ . L'image réciproque du fixateur de u est un sous-groupe de $\mathbf{Z}$ non réduit à $\{0\}$ car contenant $|u|$. Or les sous-groupes de $\mathbf{Z}$ sont monogène de la forme $p\mathbf{Z}$ avec $p > 0$ s'ils ne sont pas réduits à $\{0\}$. Par isomorphisme, le fixateur de u est monogène engendré par δ^p , donc il contient exactement les δ^k tels que k multiple de p .

Comme on a toujours $\delta^{|u|}(u) = u$, alors $|u|$ est multiple de p , donc on peut factoriser u en mots de longueur p (plus courts ou non) :

$$u = x_1 x_2 \dots x_k$$

$$\text{Alors } \delta^p(u) = x_2 \dots x_k x_1 = u = x_1 x_2 \dots x_k.$$

Comme $|x_1| = |x_2| \dots = |x_k|$, on a $x_1 = x_2 \dots = x_k$ que l'on note x . D'où $u = x^k$.

Le mot x est nécessairement primitif, car s'il était puissance d'un mot plus court $x = y^m$, alors on aurait $\delta^{|y|}(u) = \delta^{|y|}(y^{mk}) = y^{mk} = u$, donc $|y|$ serait multiple de p , impossible si $|y| < |x| = p$.

Le mot u a exactement p permutations circulaires distinctes, car si l'on avait $\delta^i(u) = \delta^j(u)$ pour $0 \leq i < j < p$, on aurait $\delta^k(u) = u$ pour $k = j - i < p$, impossible car k doit être multiple de p .

1.2 Mots de Lyndon

Un *mot de Lyndon* est un mot

- primitif,
- minimal pour l'ordre alphabétique dans sa classe de conjugaison.

Exemples : *abaa* est-il un mot de Lyndon ?

-> non, le mot de Lyndon associé est *aaab*.

Quel est le mot de Lyndon associé à *xyxy* ?

-> *xyxy*

Pour étudier des structures musicales périodiques, les mots de Lyndon fournissent un représentant unique pour chaque classe de conjugaison.

Il existe un algorithme très efficace pour calculer les mots de Lyndon (algorithme de Duval). Cet algorithme repose sur les propriétés suivantes :

Propriété ([Lothaire 1983, p. 66, proposition 5.1.3]). *w* mot de Lyndon si et seulement si soit *w* est une lettre, soit *w* est un produit de mots de Lyndon plus courts :

$w = uv$ avec *u*, *v* mots de Lyndon tels que $u < v$.

Théorème ([Lothaire 1983, p. 67, théorème 5.1.5]). *Tout mot non vide w admet une factorisation unique en mots de Lyndon $w = u_1 u_2 \dots u_n$ tels que $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n$.*

Exemples :

- toutes les factorisations de *ab* en mots de Lyndon ?

(*a*)(*b*)

(*ab*)

Laquelle est décroissante ?

→ (ab) car c'est un mot de Lyndon

• toutes les factorisations de $abaac$ en mots de Lyndon ?

$(a)(b)(a)(a)(c)$

$(ab)(a)(a)(c)$

$(a)(b)(a)(ac)$

$(ab)(a)(ac)$

$(a)(b)(aac)$

$(ab)(aac)$

Laquelle est décroissante ?

→ $(ab)(aac)$

On note que $abaac$ n'est pas un mot de Lyndon. Par contre, $aacab$ est un mot de Lyndon et on a bien $aac < ab$.

• factorisation décroissante de $aababbaaba$?

→ $(aababb)(aab)(a)$

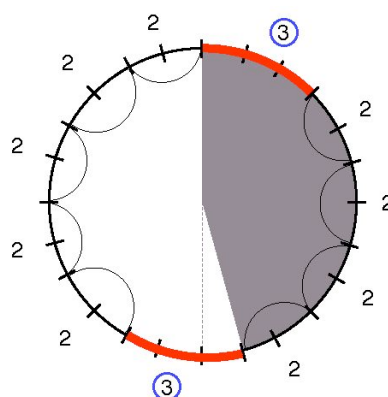
→ il faut chercher le plus long mot de Lyndon à gauche (comme préfixe du mot)

Attention : dans cet exemple, a , ab , aab sont des mots de Lyndon, $aaba$ ne l'est pas, mais $aabab$ et $aababb$ le sont → il faut regarder plus loin...

Dans la suite, on convient que les indices des lettres d'un mot sont comptés circulairement, c'est-à-dire que si n est la longueur de ce mot, l'ensemble des indices est identifié à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Cela permet d'écrire $i + j$ à la place de $i + j \bmod n$.

2. Combinatoire des mots appliquée à la musique

2.1 Imparité rythmique



Définition. Un mot u sur l'alphabet $\{0, 1\}$ vérifie l'imparité rythmique si aucune de ses permutations circulaires ne se factorise en deux mots de même longueur commençant par 1.

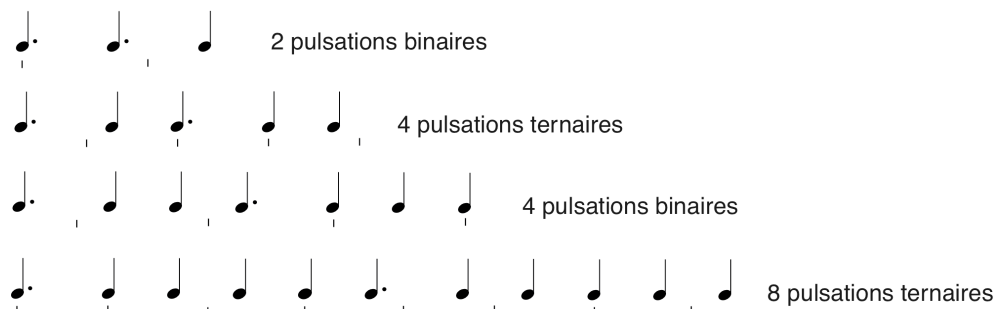
Exemple : 24 unités, pas de factorisation en 2 mots de longueur 12 commençant par 1

(100101010101)(001010101010)
 (001010101010)(010101010101)
 (010101010100)(101010101010)
 (101010101001)(010101010100) etc.

Remarque : La définition n'a de sens que pour des mots **de longueur paire $2k$** (car si la longueur est impaire, **on ne peut pas factoriser** en deux mots de même longueur).

2.2 Pulsation et contramétrie

Les rythmes asymétriques africains sont toujours liés à une pulsation sous-jacente régulière :



Introduire une pulsation revient à factoriser la séquence en facteurs **de même longueur p** .

Ex : • dans le premier rythme, le nombre total d'unités est 8 croches, la pulsation correspond à un groupement toutes les 4 croches (2 pulsations binaires)

• dans le deuxième rythme, le nombre total d'unités est 12 croches (2 noires pointées + 3 noires), la pulsation correspond à un groupement toutes les 3 croches (4 pulsations ternaires)

Dans les exemples de l'imparité rythmique, la longueur totale $|u|$ est toujours paire.

→ la pulsation définit toujours un groupement en nombre d'unités divisant la moitié $|u|/2$

Propriété. Un mot u de longueur paire sur l'alphabet $\{0, 1\}$ vérifie l'imparité rythmique si et seulement si toute factorisation d'une permutation circulaire de u en mots de longueur p , où p divise $|u|/2$ (u de longueur paire), il y a au plus une moitié de facteurs commençant par 1.

Dem. C.S. C'est le cas particulier $p = |u|/2$. Dans les factorisations en mots de longueur $|u|/2$, il y a deux facteurs. L'un au plus commence par 1, d'où l'imparité rythmique.

C.N. Soit p divisant $|u|/2$, on a $|u|/2 = kp$, donc $|u| = 2kp$, donc une factorisation d'une permutation circulaire de u en mots de longueur p comporte un nombre pair de facteurs $2k$. Soit $V = \{v_i, 1 \leq i \leq 2k\}$ l'ensemble des facteurs. En les groupant par paires $P_i = \{v_i, v_{i+k}\}$, $1 \leq i \leq k$, on définit une partition de V dont chaque classe comporte deux facteurs à distance k dans la numérotation. Soit $E = \{v_i, v_i \text{ commence par } 1\}$. L'imparité rythmique implique, pour chaque paire, $\text{card}(P_i \cap E) \leq 1$, car $(v_i v_{i+1} \dots v_{i+k-1})(v_{i+k} \dots)$ est une factorisation dont les deux facteurs ne doivent pas commencer par 1. Comme E est l'union disjointe des intersections $P_i \cap E$, on en déduit que $\text{card}(E) = \sum_{i=1, i=k} \text{card}(P_i \cap E) \leq k$, soit au plus la moitié des facteurs commençant par 1.

Remarque : Cette propriété traduit une idée de **contramétricit ** (moins de la moitié des attaques coïncident avec la pulsation) :

- *com trique* : les attaques coïncident avec la pulsation
- *contram trique* : les attaques **ne coïncident pas avec** la pulsation (mais il en faut quand même **avec** la pulsation, car sinon il suffit de se décaler par permutation circulaire pour faire coïncider des attaques avec la pulsation)

La propriété ne suffit pas à donner un modèle satisfaisant de la contram tricit .

Exemples de cas « pathologiques » :

- s'il n'y a qu'un seul 1, par exemple 10000000

->  a vérifie l'imparité rythmique, mais est-ce contram trique ?

-> on voit que pour parler de contram tricit , il faut des attaques **en dehors de la pulsation**.

- si les 1 sont groupés ensemble, par exemple 11110000

->  a vérifie l'imparité rythmique, mais ce n'est pas vraiment contram trique.

-> il faut une **répartition maximale** des attaques sur l'ensemble des pulsations

Dans les rythmes africains, cette répartition est donnée « empiriquement » par une condition supplémentaire : les durées sont égales à 2 ou 3.

-> mais est-ce la seule manière de capter cette notion de « répartition maximale » ?

- si les 1 sont répartis de manière périodique, mais avec une période qui ne divise pas $|u|/2$ (par exemple une période 8 pour une longueur 24) :

(10010010)(10010010)(10010010)

→ pas contram trique par rapport à cette factorisation de longueur 8

Dans les rythmes africains, il y a une autre condition : la pulsation est déterminée par la durée totale qui est une puissance de 2 à un facteur 3 près

- soit 2^n ($n \geq 2$), auquel cas la pulsation est $p = 4$,
- soit $2^n \times 3$ ($n \geq 2$), auquel cas la pulsation est $p = 3$.

donc si la durée totale est multiple de 3, la pulsation est nécessairement ternaire (multiple de 3)

La factorisation selon cette pulsation $p = 3$ donnerait :

(100)(100)(101)(001)(001)(010)(010)(010) $\rightarrow$ 3 pulsations avec une attaque, 6 sans attaque et de même pour les trois rotations

$\rightarrow$ contramétrique (moins de la moitié des attaques coïncident avec la pulsation)

2.3 Cas particulier des mots sur 2 et 3

Si les durées sont 2 ou 3, on peut considérer l'alphabet $\Sigma = \{2, 3\}$ et on étudie les rythmes qui sont des mots de Σ^* . Le poids $h(w)$ d'un mot w est la somme de ses chiffres.

Définition. Un mot w sur l'alphabet $\{2, 3\}$ vérifie l'imparité rythmique (au sens restreint aux durées 2 et 3) si aucune de ses permutations circulaires ne se factorise en deux mots de même somme, c'est-à-dire de la forme uv avec $h(u) = h(v)$.

Exemple : $w = 32322$

(32)(322)	$h(32)=5, h(322)=7$
(23)(223)	$h(23)=5, h(223)=7$
(32)(232)	$h(32)=5, h(232)=7$
(223)(23)	$h(223)=7, h(23)=5$
(232)(32)	etc.

Remarques : Si le poids total du mot est impair, on ne peut avoir deux facteurs de même poids, donc la définition est triviale. La définition n'a de sens que si le poids est pair, donc il faut **un nombre pair de 3**.

Propriété. Les mots rythmiquement impairs sur $\{2, 3\}$ ayant seulement deux durées 3 sont nécessairement de la forme :

$2^n 3 2^{n-1} 3$ (à une rotation près).

Dem. On montre qu'avec deux durées 3, la différence de longueur entre les facteurs de durées 2 qui les séparent doit être exactement égale à 1. Par l'absurde, supposons qu'elle soit différente de 1. On distingue selon qu'elle est paire $2k$, ou impaire non égale à 1 soit $2k + 3$ avec $k \geq 0$, et on trouve dans chaque cas une rotation équilibrée en passant 2^k à la fin :

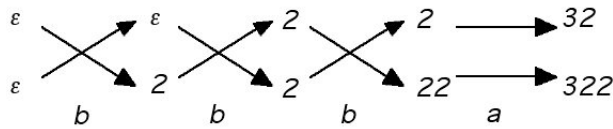
- si la différence est paire $w = 2^n 3 2^{n-2k} 3 \rightarrow$ rotation équilibrée $(2^{n-k} 3)(2^{n-2k} 3 2^k)$
- si la différence est impaire $w = 2^n 3 2^{n-2k-3} 3 \rightarrow$ rotation équilibrée $(2^3 2^{n-k-3})(3 2^{n-2k-3} 3 2^k)$ car $h(2^3) = h(222) = h(33)$

Corollaire. Avec deux durées 3, les mots rythmiquement impairs sont **uniques** pour une longueur (à une rotation près).

2.4 Construction des rythmes vérifiant l'imparité rythmique

Soient deux transformations a et b de $\Sigma^* \times \Sigma^*$ dans $\Sigma^* \times \Sigma^*$ définies par :

$$a(u, v) = (3u, 3v), \quad b(u, v) = (v, 2u).$$



Le rythme 32322 s'écrit $(32)(322)$ avec $(32, 322) = abbb(\epsilon, \epsilon)$.

Théorème ([Chemillier & Truchet 2003]). *Un mot w vérifie l'imparité rythmique si et seulement s'il existe une transformation α obtenue en combinant a et b avec un nombre impair de b telle que $\alpha(\epsilon, \epsilon) = (u, v)$ avec $w = uv$ ou vu .*

Soit $D = \{w \text{ tels que } w = uv \text{ avec } (u, v) = \alpha(\epsilon, \epsilon) \text{ et } \alpha \text{ ayant un nombre impair de } b\}$.

Proposition. *Pour w et w' dans D , on a :*

w et w' conjugués si et seulement si α et α' conjugués dans $\{a, b\}^$.*

Pour calculer un représentant par classe de conjugaison de mots w vérifiant l'imparité rythmique, il suffit de calculer les mots de Lyndon pour les mots α sur $\{a, b\}^*$.

On note n_2 et n_3 les nombres de 2 et de 3 dans un rythme vérifiant l'imparité rythmique :

Proposition. *Le nombre de solutions à l'imparité rythmique pour $n_3 = 8$ est la somme des carrés.*

Dem. Les solutions peuvent être associées à des suites α de a et b d'après le théorème précédent, avec quatre a et un nombre impair de b . Soit p la longueur de α . Énumérer les solutions consiste à énumérer les α possibles en plaçant 4 symboles a parmi p dans α , mais en enlevant les permutations circulaires.

Combien y a-t-il de permutations circulaires pour α ?

Supposons α non primitif : $\alpha = \gamma^n$, avec $n \geq 2$. Le nombre de a dans α est n fois le nombre de

a dans γ . Mais 4 est divisible seulement par 2 et 4. Dans ces conditions, le nombre de b dans α ne peut pas être impair, ce qui est faux.

D'où α primitif, donc il a exactement p permutations circulaires.

Le nombre de solutions est

$$x = \frac{1}{p} C_p^4 = \frac{(p-3)(p-2)(p-1)}{4!}$$

Comme n_2 est impair, on peut écrire $n_2 = 2k - 1$, donc $p = n_2 + 4 = 2k + 3$, d'où :

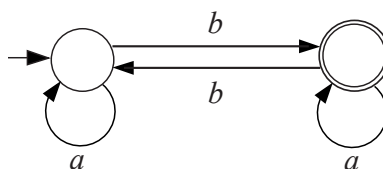
$$x = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Il existe un lien très curieux entre l'asymétrie de ces rythmes et l'asymétrie de la gamme diatonique (touches noires du clavier séparées par 2, 3, 2, 2, 3 demi-tons), qui a été mis en évidence pour la première fois, semble-t-il, par Jeff Pressing en 1983.

De nombreux travaux, notamment ceux de Godfried Toussaint, ont étudié ces structures asymétriques en introduisant des concepts de combinatoire des mots (chaînes euclidiennes).

2.5 Lien avec les automates et les transductions

Proposition. *L'ensemble des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ contenant un nombre impair de b est reconnaissable par automate fini.*



Peut-on avoir une construction directe avec les valeurs rythmiques 2 et 3 sans passer par les transformations abstraites a et b ?

→ cela revient à remplacer

- un mot sur l'alphabet $\{a, b\}$
- par un **couple de mots** (u, v) sur l'alphabet $\{2, 3\}$

Problème : si l'on considère des « couples » de mots, on a des commutations telles que :

$$(a, \varepsilon)(\varepsilon, b) = (\varepsilon, b)(a, \varepsilon)$$

→ l'ensemble des couples de séquences $\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$ *n'est pas un monoïde libre* sur un alphabet... c'est une **monoïde quelconque** !

Définition. L'ensemble des parties rationnelles $\text{Rat}(M)$ d'un monoïde quelconque M est le plus petit ensemble de parties de M

- contenant les parties finies,
- fermé par union, produit et étoile.

Proposition. Pour des monoïdes quelconques, l'image directe par un morphisme d'une partie rationnelle est rationnelle.

Attention : *ce n'est pas vrai pour l'image réciproque*

→ sauf dans le cas des monoïdes libres où la situation est plus simple.

$\text{Rat}(\Sigma^*)$ = ensemble des parties rationnelles de Σ^*

$\text{Rec}(\Sigma^*)$ = ensemble des parties de Σ^* reconnaissables par automate fini (AFN ou AFD)

Proposition. Les parties du monoïde libre rationnelles sont exactement les parties reconnaissables par automate fini (régulières) : $\text{Rat}(\Sigma^*) = \text{Rec}(\Sigma^*)$

Dem. CN. $\text{Rec}(\Sigma^*)$ contient les parties finies et il est fermé par union, produit, étoile (on l'a vu pour l'union, le produit et l'étoile se traitent de la même manière). Comme $\text{Rat}(\Sigma^*)$ est le plus petit ensemble de parties vérifiant ces propriétés, $\text{Rec}(\Sigma^*)$ contient $\text{Rat}(\Sigma^*)$.

CS. Pour montrer que $\text{Rec}(\Sigma^*)$ est inclus dans $\text{Rat}(\Sigma^*)$, on prend un langage L reconnu par un automate avec les états $Q = \{1, 2, \dots, n\}$ et on pose :

$L_{ij}^{(k)}$ = ensemble des mots allant de i à j avec uniquement des états intermédiaires $< k$

Les mots n'utilisant que des états intermédiaires $< k + 1$:

- soit n'utilisent pas l'état k (uniquement des états intermédiaires $< k$)
- soit utilisent l'état k et se décomposent en un mot $i \rightarrow k$ (sans passer par k), un ou plusieurs mots bouclant sur cet état $k \rightarrow k \rightarrow k \dots$, puis un mot pour $k \rightarrow j$ (sans passer par k).

D'où une formule de récursion basée sur l'union, le produit et l'étoile :

$$L_{ij}^{(k+1)} = L_{ij}^{(k)} \cup L_{ik}^{(k)} (L_{kk}^{(k)})^* L_{kj}^{(k)}$$

De plus $L_{ij}^{(0)}$ est fini car ce sont les flèches directes entre i et j étiquetées par des lettres (sans états intermédiaires).

On a $L = \bigcup_{i \in I, j \in T} L_{ij}^{(n+1)}$ donc L s'obtient à partir de parties finies en appliquant l'union, le produit et l'étoile, donc $L \in \text{Rat}(\Sigma^*)$.

Une partie rationnelle de $\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$ est appelée une transduction rationnelle.

Un automate étiqueté par des couples de mots de $\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$, et avec un seul état initial, est appelé un transducteur.

Remarque : il n'y a pas de contraintes sur les étiquettes, alors que pour un automate dans le monoïde libre, on peut restreindre les étiquettes à des lettres et non des mots.

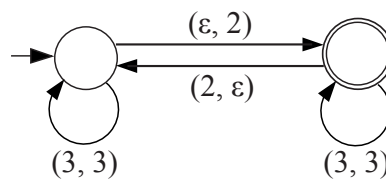
Théorème ([Berstel, Théorème 6.1, p. 78]). *Une partie de $\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$ est une transduction rationnelle de $\text{Rat}(\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*)$ si et seulement si elle est réalisée par un transducteur.*

Dem. C.N. Utilise le théorème de Nivat (voir le livre de Berstel).

C.S. Soit un transducteur d'état initial i et d'états finals F , avec un nombre fini de flèches. On considère l'ensemble E des flèches comme un alphabet et on forme le monoïde libre E^* . On remplace les étiquettes du transducteur par les flèches elles-mêmes. Le transducteur devient un automate sur l'alphabet E reconnaissant un langage régulier K de E^* . On considère le morphisme f de E^* dans $\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$ qui a une flèche associe son étiquette. La transduction est l'image directe $f(K)$ d'un langage régulier par un morphisme, donc c'est une partie rationnelle de $\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$.

Pour obtenir une « machine » qui calcule directement les solutions de l'imparité rythmique avec des durées 2 et 3, on construit un automate sur des couples (= un transducteur) :

- en remplaçant les a par $(3, 3)$ dans l'automate des mots ayant un nombre impair de b
- en remplaçant les b par $(\varepsilon, 2)$ ou $(2, \varepsilon)$ selon le cas



Références

• ouvrages et articles généraux

Lothaire M., *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics, Vol. 17, Addison-Wesley, 1983 (réédité Cambridge University Press, 1997) ([biblio](#)).

Duval, Jean-Pierre, Génération d'une section des classes de conjugaison et arbre des mots de Lyndon de longueur bornée, *Theoretical Computer Science*, 60 (3) (1988) 255-283.

- combinatoire des mots appliquée à la musique

Chemillier M., Periodic musical sequences and Lyndon words, *Soft Computing*, special issue on Formal Systems and Music, G. Assayag, V. Cafagna, M. Chemillier (eds.) **8** (9) (2004) 611-616 ([biblio](#)).

Chemillier M., Truchet C., Computation of words satisfying the "rhythmic oddity property" (after Simha Arom's work), *Information Processing Letters* **86** (5) (2003) 255-261 ([biblio](#)).

Chemillier M., Musique et rythme en Afrique centrale, *Pour la science*, dossier n° 47 « Mathématiques exotiques » (2005) 72-76, repris sur le site *CultureMATH* de l'ENS Ulm : <http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/chemillier05-09/math-musique-afriquecentrale.html>

Chemillier M., *Les Mathématiques naturelles*, Paris, Odile Jacob, 2007.

Bouchet André, Imparité rythmique, *CultureMATH*, 2 octobre 2010 : <http://www.math.ens.fr/culturemath/maths/articles/Bouchet2010/imparite-rythmique.html>

Pressing Jeff, Cognitive Isomorphisms Between Pitch and Rhythm in World Musics: West Africa, the Balkans and Western Tonality, *Studies in Music* (Australia) 17 (1983) 38–61 ([biblio](#)).