

CHAPITRE 2 : AUTOMATES FINIS DETERMINISTES (AFD)

1. Définition des automates finis déterministes (AFD)

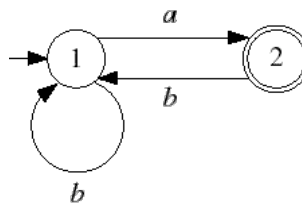
1.1 Définition générale

Définition. Un automate fini déterministe AFD sur un alphabet Σ est la donnée d'un n -uplet (Q, δ, i, F) où :

- Q est un ensemble fini d'états,
- δ est une fonction de transition de $Q \times \Sigma$ dans Q ,
- i est un état particulier de Q dit initial,
- F est une partie de Q d'états dits finals.

L'automate est dit complet lorsque la fonction δ est partout définie sur $Q \times \Sigma$.

Exemple :



$Q = \{1, 2\}$,

$i = 1$, état noté avec une petite flèche entrante,

$F = \{2\}$, état noté avec deux cercles.

$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$

$(1, a) \rightarrow 2$

$(1, b) \rightarrow 1$

$(2, b) \rightarrow 1$

Cet automate n'est pas complet, car $\delta(2, a)$ n'est pas défini.

Pour décrire un automate, il est commode d'utiliser une table de transitions :

	1	2
a	2	
b	1	1

1.2 Prolongement de la fonction de transition

Le calcul de l'automate consiste à suivre des flèches, en partant d'un état initial et en s'arrêtant dans un état final. Le mot correspondant à ce calcul est la suite des étiquettes des flèches.

On prolonge δ par induction, en une fonction sur les mots de $Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$

(attention : la fonction δ est définie au départ sur $Q \times \Sigma$ et pas sur $Q \times \Sigma^*$):

$$\delta(q, \varepsilon) = q,$$

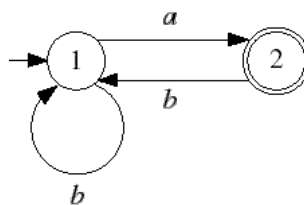
$$\delta(q, wa) = \delta(\delta(q, w), a)$$

pour tous $q \in Q, w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$.

$\delta(q, w)$ = état atteint après lecture du mot w depuis l'état q .

Propriété d'associativité. Pour tous mots $u, v \in \Sigma^*$, on a : $\delta(q, uv) = \delta(\delta(q, u), v)$.

Exemple : dans l'automate ci-dessus



a correspond au calcul $1 \rightarrow 2$,

aba correspond au calcul $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$,

donc on écrira :

$$\delta(1, aba) = 2.$$

À partir de l'état 2, on ne peut lire un mot commençant par a , mais on peut lire $babb$ par exemple : $\delta(2, babb) = 1$.

La propriété d'associativité donne :

$$\delta(1, abababb) = \delta(\delta(1, aba), babb) = \delta(2, babb) = 1.$$

Le mot aba correspond à un calcul terminal car :

$$\delta(1, aba) = 2 \in F \text{ terminal.}$$

En revanche, $abababb$ ne correspond pas à un calcul terminal de l'automate :

$$\delta(1, abababb) = 1 \text{ non terminal.}$$

1.3 Langage reconnu par un AFD

Définition. Le langage reconnu (ou accepté) par un automate AFD est l'ensemble des mots qui correspondent à un calcul de l'automate partant d'un état initial et s'arrêtant dans un état final.

Exemple : le langage reconnu par l'automate ci-dessus est

$$b^*a(bb^*a)^*$$

Les automates finis sont les modèles de machine les plus simples : ils n'ont aucun support de mémoire externe (comme la pile d'un automate à pile).

Leur mémoire est donc finie (espace constant), et correspond à leur nombre d'états. Par exemple, dans l'automate ci-dessus, l'état 1 permet de se souvenir qu'il faut lire un a pour sortir.

Exemples :

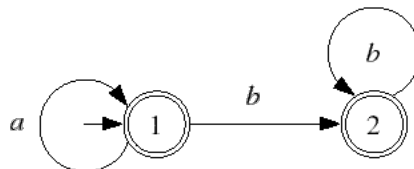
- distributeur de café : les pièces introduites sont les symboles de l'alphabet, l'état terminal est atteint quand le montant est supérieur au montant demandé,
- mécanisme contrôlant le code d'accès d'une porte : les chiffres tapés sont les symboles, l'état terminal est celui qui déclenche l'ouverture,
- rubiks cube : l'alphabet est l'ensemble des rotations des 6 faces.

2. Clôture par complément des langages reconnus par AFD

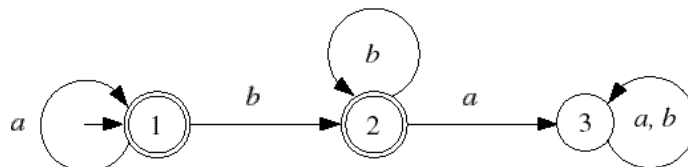
Propriété. Si L est un langage reconnu par AFD, alors son complémentaire $\Sigma^* \setminus L$ l'est aussi.

Exemple : $L = \{a^i b^j, i, j \in \mathbf{N}\}$,

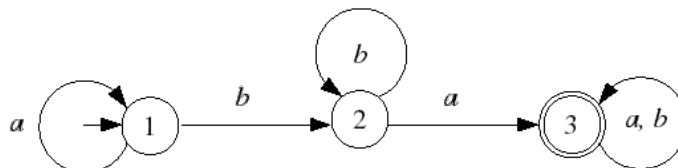
$$\Sigma^* \setminus L = \{w \in \Sigma^*, ba \text{ est facteur de } w\}$$



On complète l'automate :



Puis on intervertit les états finals :



Construction :

Si $A = (Q, \delta, i, F)$ est un AFD complet qui reconnaît L , alors

$A = (Q, \delta, i, Q \setminus F)$ reconnaît $\Sigma^* L$.